

ОБОСНОВАНИЕ ЭФФЕКТА ПРИТОРМАЖИВАНИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ КОЛЕС ПОДВИЖНОГО СОСТАВА НА РЕЛЬС С ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ ВОЛНЫ В ЗОНЕ ДЕФЕКТА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ

На основе предположения, что рельсовая нить есть бесконечная струна, «прилипшая» к жесткому основанию, ставится и решается задача локализации этой волны. Показывается возможность выявления дефектов железнодорожного пути в местах «отлипания» струны.

Ключевые слова: волна, упругие колебания, железнодорожный путь, система колесо-рельс, дефект, локализация волны

EDN: ZXFZPY



А.А. Локтев



А.В. Сычева

Применение теории волновых процессов в системе взаимодействия «колесо-рельс» основано на предположении, что одним из показателей воздействия колеса на рельс является запись вагона-путеизмерителя о состоянии рельсовой колеи, которую условно считаем случайным процессом в пространстве [1].

Теоретически железнодорожный путь есть конструкция последовательно соединенных упругих элементов (пружин), которые сопротивляются упругим деформациям под воздействием подвижного состава [2]. Это весьма упрощенное представление было во второй половине XX века развито А.А. Шестаковым, и позже его учениками Ю.М. Черкашиным и О.В. Дружининой [3–7], которые предложили оценивать устойчивость железнодорожного пути как решение

задачи детерминистической теории устойчивости замкнутых множеств относительно обыкновенной дифференциальной системы. Стохастическая дифференциальная система в общем виде представлялась как [7]:

$$dx(t) = b(x(t))dt + \sigma(x(t))dW(t), \quad (1)$$

где, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$; $\sigma(x) = \|\sigma_{ij}(x)\|$, $ij = 1, 2, \dots, n$.

Постановка задачи

Предположим, что рельсошпальная решетка является сплошной средой, лежащей на упругом основании, к которой прикреплена рельсовая нить как бесконечная струна, находящаяся под воздействием динамических и вибрационных нагрузок от подвижного состава (упрощенно представлено на рис. 1). Система

Локтев Алексей Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Транспортное строительство» Российской открытой академии транспорта Российского университета транспорта (РОАТ РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: механика деформированного тела, моделирование объектов транспортной инфраструктуры, железнодорожный путь, реконструкция объектов исторического и архитектурного наследия. Автор 188 научных работ, в том числе трех монографий.

Сычева Анна Вячеславовна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Здания и сооружения на транспорте» Российской открытой академии транспорта Российского университета транспорта (РОАТ РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: инженерное обеспечение строительства, инженерная геология. Автор 57 научных работ.

Сычев Вячеслав Петрович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Транспортное строительство» Российской открытой академии транспорта Российского университета транспорта (РОАТ РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: создание новых технологий и технических средств для повышения эффективности технического обслуживания железнодорожного пути. Автор 156 научных работ. Имеет 20 патентов на изобретения.

«колесо-рельс» обладает инерционными, диссипативными и жесткими свойствами. Тогда (1) есть частный случай системы дифференциальных уравнений в форме Коши, которая представлена как:

$$\ddot{x}_k = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \beta_j \dot{x}_{kj} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} c_j x_{kj} + d_k \dot{W}_k, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}.$$

где x_j и $\dot{x}$ — относительные перемещения и скорости; β_j и c_j — коэффициенты, описывающие свойства системы «колесо-рельс», а W_k — ограниченный гауссов белый шум, как производная от случайного возмущения [8]. Система взаимодействия «колесо-рельс» есть динамическая система со случайными возмущениями, которую можно представить в виде стохастической дифференциальной системы и, в частном случае, ее можно представить в виде линейной системы дифференциальных уравнений в форме Коши, которыми описывают пространственные колебания вагона, движущегося по железнодорожному пути со случайными неровностями [9].

Решение задачи

Задача решается локализацией колебаний [10], вызванных «отслоением» струны от упругого основания. Частный случай решения задачи — оценка дефектности скреплений, определение дефектности промежуточного скрепления, не обеспечивающего крепление рельса к упругому основанию [11].

Характер затухания волны определяется минимальной частотой этих бегущих волн [12]. При прохождении состава по железнодорожному пути жесткость верхнего строения, как полубесконечной струны характеризуется кубической нелинейностью, а в каче-

стве нагрузки $P(f, t)$ принимается сосредоточенная сила вида

$$P_0 \delta(f - f_0) \delta(t), \quad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака; f — пространственная координата; t — время.

Уравнение, описывающее волновые процессы в струне, есть уравнение Клейна-Гордона [13] с кубической нелинейностью и дельтаобразной правой частью, а именно:

$$T y_{ff} - p y_{tt} - k y - V y^3 = P_0 \delta(f - f_0) \delta(t - 0), \quad (4)$$

где T — натяжение струны; p — ее линейная плотность; $V y^3$ — нелинейный вклад, вносимый упругим основанием.

Граничные условия:

$$y(f, 0) = y_t(f, 0) = 0,$$

$$y(\infty, t) = y_t(\infty, t) = 0.$$

На упругой натянутой струне сосредоточена масса M , тогда применим второй закон Ньютона для сосредоточенного включения M :

$$T y_{f|f=0} = M(y_{tt})_{f=0}. \quad (5)$$

Частота колебаний локализованной волны зависит [14] от амплитуды волны, а бегущие волны кратной частоты отводят энергию от локализованной волны и приводят к ее затуханию.

Определение дефектов железнодорожного пути по положению минимальной частоты бегущих волн относительно частоты отсечки. Задача решается на основе приближенной теории поперечного удара о балку Сен-Венана, заключающейся в предположении о неупругом и немгновенном характере удара. Частично подобная задача решалась ранее [15], но в настоящей работе развита следующим образом.

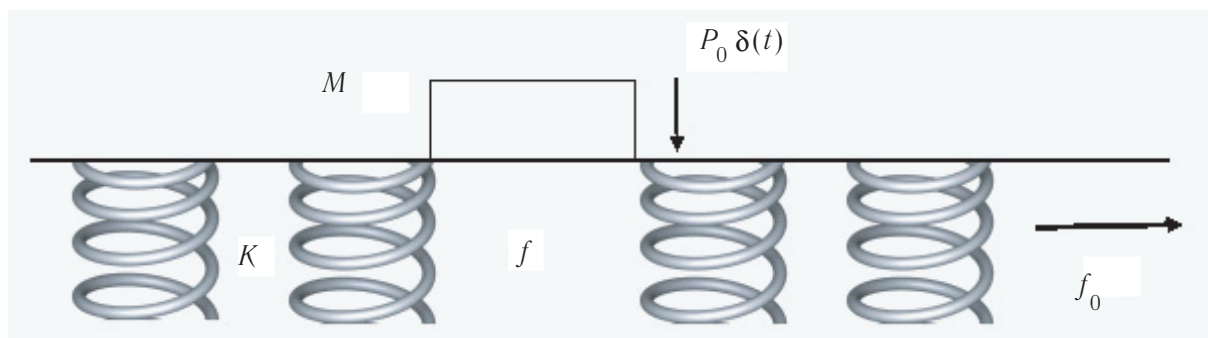


Рис. 1. Полубесконечная струна – рельсовая нить на упругом основании жесткостью K сосредоточенной массой M

Для нахождения явного вида функции $P=P(t)$ предлагается применить теорию удара С.П. Тимошенко для случая динамического контакта колеса и рельса на упругом основании.

Граничные условия устанавливаются из условия, что длина рельса такова, что колебания от первого контакта колеса с рельсом не дошли до конца плети до второго контакта, а именно:

$$y(x)|_{x=0} = y(x)|_{x=l} = 0.$$

Скорость распространения упругих волн в стали имеет порядок $5 \cdot 10^3$ м/с. Найдя нулевые значения $P(\tau)=0$ общей зависимости $P=P(t)$, можно определить время контакта и оценить расстояние, на которое распространится упругое возмущение.

Динамический контакт двух тел происходит при выполнении условия, что общая нормаль в точке прикосновения недеформированных поверхностей колеса и рельса проходит через центр инерции тела вертикально. Уравнение поверхности колеса в точках начального касания с рельсом и их окрестностях свободно от аналитических особенностей, а кривизна колесной пары в тех же точках не должна быть равна нулю.

Дифференциальное уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\rho}{EI} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{q(x,t)}{EI}, \quad (6)$$

где ρ — погонная масса рельса.

Предполагается, что начало координат находится на левом торце рельса длиной l , а координатная ось Ox направлена вправо. При этом выполняются начальные условия:

$$y(x,0)=0; \quad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Предположим, что рельс по краям закреплен шарнирно, тогда:

$$(x)|_{x=0} = y(x)|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = 0. \quad (8)$$

После интегрального преобразования Лапласа из уравнения (6) получим

$$\frac{d^4 y^*}{dx^4} = -\frac{\rho}{EI} p^2 y^* + \frac{q^*(x,p)}{EI}. \quad (9)$$

Здесь функция $y^*(x,p)$ является представлением функции $y(x,t)$ в пространстве изображений, а $q^*(x,p)$ — изображением $q(x,t)$. Функция $y^*(x,p)$ удовлетворяет тем же краевым условиям, что и ее оригинал $y(x,t)$.

Если обозначить силу взаимодействия между колесом и рельсом как $P^*(p)$, задача определения $y^*(x,p)$ подобна задаче определения прогибов рельса, находящегося под действием силы $P^*(p)$ при соответственных краевых условиях. В прогибы $y^*(x,p)$ не входит местная деформация сжатия в области контакта колеса и рельса.

Прогибы рельса y^* , свободно опертого по концам, возникшие под действием силы P^* , можно представить в форме

$$y^*(x,p) = \frac{2P^* l^3}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (10)$$

где a — координата точки приложения силы $P^*(p)$.

Прогиб рельсовой плети, приведенный к силе взаимодействия между колесом и рельсом записывается в виде

$$u(x,p) = \frac{y^*(x,p)}{P^*(x,p)} = \frac{2l^3}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (11)$$

где $u(x,p)$ — изображение прогиба от единичной силы, точка приложения которой имеет координату a .

Дифференциальное уравнение движения центра инерции колесной пары с учетом действующего на нее приведенного веса имеет вид

$$m_1 \frac{d^2 s}{dt^2} = m_1 g - P(t). \quad (12)$$

Начальные условия динамического взаимодействия могут быть записаны в следующем виде:

$$s|_{t=0} = 0; \quad \frac{ds}{dt}|_{t=0} = v_0. \quad (13)$$

Используя интегральное преобразование и начальные условия, можно записать определяющее уравнение в виде

$$P^*(p) = -m_1 p^2 s^*(p) + m_1 p v_0 + m_1 g. \quad (14)$$

Здесь $s^*(p)$ — изображение перемещения $s(t)$.

Вертикальное перемещение колесной пары s можно представить в виде

$$s(t) = \infty(t) + y(x,t). \quad (15)$$

В пространстве изображений уравнение (15) примет вид

$$s^*(p) = \infty^*(p) + y^*(x,p). \quad (16)$$

Здесь $\infty^*(p)$ — местное смятие рельса и колеса в пространстве изображений.

Выражение (14) принимает вид

$$P^*(p) = -m_1 p^2 (\infty^* + y^*) + m_1 p v_0 + m_1 g. \quad (17)$$

Зависимость между местным смятием $\propto$ и силой взаимодействия $P(t)$ в общем случае выражается формулой:

$$\propto^* = kP^{*q}, \quad (18)$$

где параметр q имеет вид рациональной дроби. Значение $q=2/3$ соответствует начальному касанию в точке, а $q=1-\frac{1}{2n+1}$ — плотному начальному контакту.

С учетом зависимости для местного смятия и представления вертикальной скорости контактирующих тел в пространстве изображений, получим

$$P^*(p)(1+m_1p^2u) = -m_1p^2kP^{*q}(p) + m_1pV^*. \quad (19)$$

Для решения инженерной задачи и получения приближенного решения функционального уравнения предлагается применить алгоритм последовательных приближений, а уравнение (19) записать в виде

$$P^{*q} [km_1p^2 + (1+m_1p^2u)P^{*1-q}] = m_1pV^*. \quad (20)$$

Из (20) можно найти зависимость для силы взаимодействия в пространстве изображений

$$P^* = \left(\frac{V^*}{k} \right)^{\frac{1}{q}} p^{-\frac{1}{q}} \frac{1}{\left[1 + (1+m_1p^2u) \frac{P^{*1-q}}{km_1p^2} \right]^{\frac{1}{q}}}. \quad (21)$$

Предлагаемый алгоритм позволяет решить характеристическое уравнение третьего порядка, определяющего $P^*(p)$ и удовлетворяющего начальным и граничным условиям задачи.

Если динамический контакт колеса и рельса происходит в точке с координатой $a=l/2$, то имеем

$$u\left(\frac{l}{2}, p\right) = \frac{2l^3}{E\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{n^4}. \quad (22)$$

Силу взаимодействия в этом случае можно представить в виде

$$P^* = \left(\frac{v_0}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{g}{v_0q} p^{-1} + \frac{(1-q)g^2}{2!v_0^2q^2} p^{-2} + \frac{(1-q)(1-2q)g^3}{3!v_0^3q^3} p^{-3} + \dots \right) p^{-\frac{1}{q}} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[1 - \frac{v_0^{\frac{1-q}{q}}}{qm_1k^q} \left(1 + \frac{(1-q)g}{v_0q} p^{-1} + \frac{(1-q)(1-2q)g^2}{2!v_0^2q^2} p^{-2} + \frac{(1-q)(1-2q)(1-3q)g^3}{3!v_0^3q^3} p^{-3} + \dots \right) \times \right. \\ & \times p^{-\frac{1+q}{q}} \left[1 + \frac{2m_1l^3}{E\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right] + \frac{(1-q)v_0^{\frac{2-2q}{q}}}{2q^2m_1^2k^q} \times \\ & \times \left(1 + \frac{(2-2q)g}{v_0q} p^{-1} + \frac{(2-2q)(2-2q)g^2}{2!v_0^2q^2} p^{-2} + \frac{(2-2q)(2-2q)(2-4q)g^3}{3!v_0^3q^3} p^{-3} + \dots \right) \times \\ & \left. \times p^{-\frac{2+2q}{q}} \left[1 + \frac{2m_1l^3}{E\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right]^2 - \dots \right] \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Задаваясь различными значениями q , соответствующими различным условиям контакта и наличия дефектов в области взаимодействия, получим выражения для силы взаимодействия. Коэффициент k представляет собой параметр, объединяющий различные упругие постоянные:

$$k = \left[\frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} A \right] \left[\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2A} \right]^{\frac{2n}{2n+1}}. \quad (24)$$

Здесь $\vartheta_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\pi\mu_i(\lambda_i + \mu_i)}$, $A = \frac{1}{2n!} \left(\frac{d^{2n} z_{1,2}}{dr^{2n}} \right)_{r=0}$, а λ_i

и μ_i — упругие постоянные Ляме для первого и второго тела соответственно.

На рис. 2 представлен пример расчета нормального перемещения рельса для следующих условий: $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\vartheta=0,3$, $q=2/3$, $A=1$, $n=1$, приведенная масса колесной пары m , начальная скорость v_0 контакта, который происходит в середине рельса длиной $l=20$ м. Скорость продольной волны $u_*=5000$ м/с. Время первого контакта равно $1,8 \cdot 10^{-4}$ с. В промежутке времени $t \in [4,06 \cdot 10^{-5}; 8,04 \cdot 10^{-5}]$

ускорение рельса $a(t) = \frac{P(t)}{m_3} \geq u_*$. При $t \in [4,06 \cdot 10^{-5};$

$9,81 \cdot 10^{-5}] \tilde{u}_0(t) = u_*$.

Несложно определить оптимальное управление на интервале времени $t \in [0; 4,06 \cdot 10^{-5}]$, поскольку из фактически линейной зависимости ускорения балки от времени на этом интервале можно представить $\tilde{u}_0(t) = u_* \sigma_0(t - t_0)$, где t_0 определяется перебором нескольких дискретных значений в окрестности середины интервала на основе минимизации модуля смещения рельса относительно основания, а $\sigma_0(t)$ — единичная функция Хэвисайда.

Для рассматриваемого случая можно записать:

$$\tilde{u}_0(t) = u_* \sigma_0(t - t_0),$$

при $t_0 = 0,192 \cdot 10^{-4}$ и $t \in [0; 9,81 \cdot 10^{-5}]$. (25)

При этом максимальное отрицательное смещение рельса относительно основания будет равно $2,7478 \cdot 10^{-3}$ м, а максимальное положительное смещение составляет $3,077 \cdot 10^{-3}$ м, в то время как для случая

мгновенного удара будем иметь $\tilde{I}_1(\tilde{u}_0) = \frac{v_0^2}{2u_*} = 0,01$ м.

График смещения рельса относительно основания по времени приведен на рис. 2.

Заключение

1. Предлагается способ выявления дефектов скреплений по эффекту «притормаживания» с локализацией упругой волны от подвижного состава, движущегося по упругому основанию — железнодорожному пути.

2. Применение теории динамического контакта С.П. Тимошенко при решении задачи о динамическом поведении контактирующих колеса и рельса позволило уточнить традиционные решения по максимальному смещению рельса относительно основания при аппроксимации вязкоупругого элемента в зоне контакта рельса и шпалы абсолютно жесткой связью.

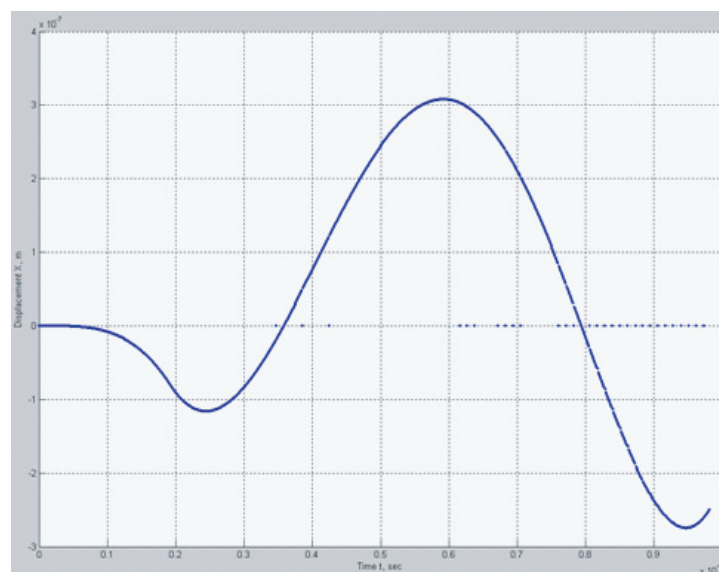


Рис. 2. Смещение рельса относительно основания при оптимальном управлении $\tilde{u}_0(t)$ на протяжении первого контакта с колесом

Литература

1. Сычев, В.П. Методы оценивания железнодорожного пути характеристиками случайных процессов / В.П. Сычев. — Текст: непосредственный // Наука и техника транспорта. — 2007. — №3. — С. 84–88.
2. Расчеты и проектирование железнодорожного пути: учебное пособие для студентов вузов железнодорожного транспорта / В.В. Виноградов и [др.]; Под ред. В.В. Виноградова, А.М. Никонова. — Москва: Маршрут, 2003. — 485 с. — Текст: непосредственный.
3. Шестаков, А.А. Индексные и дивергентные признаки устойчивости автономной системы дифференциальных уравнений / А.А. Шестаков, А.Н. Степанов. — Текст: непосредственный // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т.18, №4. — С. 650.
4. Дружинина, О.В. Необходимые и достаточные условия существования автоколебаний в конечно-мерной непрерывной динамической системе / О.В. Дружинина, А.А. Шестаков. — Текст: непосредственный // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 418, №1. — С. 37–41.
5. Сычев, В.П. О задаче обеспечения системной безопасности железнодорожного пути / В.П. Сычев, О.В. Дружинина, Ю.М. Черкашин. — Текст: непосредственный // Транспорт: наука, техника, управление. — 2009. — №12. — С. 2–4.
6. Дружинина О.В. О равномерной устойчивости состояния равновесия дифференциального уравнения, зависящего от многомерного параметра / О.В. Дружинина, А.А. Шестаков. — Текст: непосредственный // Доклады Академии наук. — 2001. — Т.377, №4. — С. 458.
7. Об устойчивости движения стохастической дифференциальной системы / Ю.М. Черкашин, А.А. Шестаков. — Текст: непосредственный // Современные методы расчета вагонов на прочность, надежность и устойчивость. Сборник научных трудов. Сер. «Труды ВНИИЖТ» Всесоюзный научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта. — Москва. 1986. — С. 28–36.
8. Бабешко, В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. — Москва: Наука, 1989. — 343 с. — Текст: непосредственный.
9. Исследование особенностей динамической реакции верхнего строения пути от подвижного состава на основе модели трансверсально-изотропной пластины на деформируемом основании / А.А. Локтев, А.В. Сычева, Е.В. Запольнова, В.П. Сычев, В.Г. Дмитриев. — Текст: непосредственный // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2018. — №2. — С. 55–65.
10. Индейцев, Д.А. Локализация нелинейных волн в упругих телах с включениями / Д.А. Индейцев, Е.В. Осипова. — Текст: непосредственный // Акустический журнал. — 2004. — Т 50, №4. — С. 496–503.
11. Сычева, А.В. Способ оценки дефектности элементов железнодорожного пути локализацией волновых процессов взаимодействия «колесо-рельс» / А.В. Сычева, Н.В. Кузнецова. — Текст: непосредственный // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. — 2020. — Т. 16, №16 (16). — С. 114–121.
12. Сычева, А.В. Управление жесткостью пути на переходных участках / А.В. Сычева, А.А. Локтев, В.П. Сычев. — Текст: непосредственный // Путь и путевое хозяйство. — 2021. — №2. — С. 16–20.
13. Денисов, Г.Г. К задаче об устойчивости одномерных безграничных упругих систем / Г.Г. Денисов, Е.К. Кугушева, В.В. Новиков. — Текст: непосредственный // Прикладная математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 4. — С. 691–696.
14. Локтев, А.А. Метод определения параметров железнодорожного пути на основе оценки анизотропных свойств грунтов геологической особенности местности / А.А. Локтев, А.В. Сычёва. — Текст: непосредственный // Наука и техника транспорта. — 2014. — №4. — С. 40–47.
15. Автоматизированная система выявления дефектов колес подвижного состава на основе оценки ударного неосесимметричного воздействия колеса на рельс при моделировании верхнего строения пути ортотропной пластиной / А.А. Локтев, В.П. Сычев, Д.А. Локтев, В.Г. Дмитриев. — Текст: непосредственный // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2017. — №4. — С. 59–60.