

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОРОЖНИХ ВАГОНОПОТОКОВ НА ПОЛИГОНЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ ТОЧКИ ФЕРМА–ТОРРИЧЕЛЛИ



В.М. Задорожний



В.А. Богачев

Развивается подход в математическом моделировании распределения порожних вагонов, образованного припортовыми станциями отправления. Решена задача транспортной логистики о нахождении оптимальных местоположений станций временного размещения порожних вагонов путем привлечения к проводимым исследованиям классического геометрического понятия точка Ферма–Торричелли.

Ключевые слова: моделирование, порожний вагонопоток, станции временного размещения, геометрическая маршрутизационная модель

EDN: TBFONP

Происходящая последние годы значительная экономико-географическая переориентация грузопотоков на территории РФ не повлекла за собой существенного уменьшения объемов и интенсивности грузоперевозок. Соответственно, не снизилась актуальность исследований, относящихся к вопросам оптимизации распределений вагонопотоков на полигонах, в частности, порожних вагонопотоков. Для операторских и логистических компаний, грузоперевозчика и клиентов функционирование в рамках оптимальных схем распределений вагонопотоков, по самой сути перевозочного процесса, представляет первостепен-

ный и непреходящий интерес в организационно-экономическом отношении.

Ряд опубликованных в последнее время статей посвящен разработке подходов и применению математических методов при построении моделей составляющих транспортного процесса. Начнем с краткого анализа результатов, полученных в [1–11] и относящихся к интересующей нас области транспортной логистики.

В [1] предлагается подход к решению проблемы, возникающей у операторов железнодорожного транспорта. Задача заключается в оптимальном управлении

Задорожний Вячеслав Михайлович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Станции и грузовая работа» Ростовского государственного университета путей сообщения (РГУПС). Область научных интересов: математическое моделирование, цифровые и интеллектуальные технологии управления, ценообразование, принятие решений, мультиагентность, геометрическая евклидова модель, алгебраические кривые высших порядков, многокритериальная оптимизация, прогнозирование. Автор 95 научных работ, в том числе трех монографий. Имеет три патента РФ.

Богачев Виктор Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика» Ростовского государственного университета путей сообщения (РГУПС). Область научных интересов: нечеткие множества и их применение в анализе систем и процессов; оптимизация функционирования транспортно-технологических систем; системы аналитических вычислений в математическом моделировании; линейные операторы в пространствах аналитических функций. Автор 83 научных работ, в том числе одной монографии. Имеет два патента РФ.

Богачев Тарас Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Фундаментальной и прикладной математики» Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) (РГЭУ (РИНХ)). Область научных интересов: нечеткие множества и их применение в анализе экономических систем; интеллектуальный анализ данных; оптимизация функционирования транспортно-технологических систем; системы аналитических вычислений в математическом моделировании; колебания пологих оболочек. Автор 128 научных работ, в том числе пяти монографий. Имеет один патент РФ.

парком грузовых вагонов с точки зрения максимизации прибыли

В [2] предложен алгоритм микроэволюции, использующий целочисленное кодирование для проблемы распределения порожних вагонов. Результаты моделирования показали, что предложенные модель и алгоритм могут лучше решать проблему распределения, связанную с динамическими изменениями спроса на порожние вагоны, предоставляя основу для принятия решений по распределению порожних вагонов и одобрению заявок клиентов на порожние вагоны.

В [3] изучаются вопросы согласования распределений потоков в железнодорожной сети с точки зрения затруднений, которые возникают для распределений порожних вагонов. Разработана модель, включающая алгоритм оптимизации колоний муравьев (АСО), которая позволяет сделать вывод о том, что ряд ограничений в рассматриваемых задачах не влияет на ее оптимальное решение.

Актуальность разработки новых математических методов в транспортно-логистических исследованиях

Выполненный выше анализ дает представление об активно продолжающихся исследованиях в различных разделах транспортной логистики с привлечением подходов и методов многообразной математической природы.

Разрабатываемый в настоящей статье подход предполагает, что для рассматриваемой части железнодорожного полигона построена геометрическая маршрутизационная модель (ГММ) олигополистического рынка транспортировки порожних вагонов [6;7]. Основная идея подхода состоит в использовании классического геометрического понятия точки Ферма–Торричелли при нахождении оптимальных местоположений станций временного размещения порожних вагонов. Поясним сказанное. После поступления с припортовых станций выгрузки на указанные (промежуточные) станции порожние вагоны подлежат дальнейшей транспортировке к станциям назначения для очередной погрузки. От местоположений промежуточных станций зависят как время нахождения порожних вагонов на припортовых станциях выгрузки, так и рациональность схем последующей транспортировки к станциям назначения. Вообще, определение точки Ферма–Торричелли для данной совокупности точек на плоскости (см. соответствующий раздел ниже) прямо указывает на востребованность этого понятия в транспортно-логистических исследованиях (по этому поводу см., например, [8]).

Картина территориального олигополистического рынка транспортировки порожних вагонов будет

иметь более целостный вид, если мы начнем с краткого описания процесса построения соответствующей ГММ.

Описание процесса построения ГММ. Коэффициент дорожной непрямолинейности

Как и для геометрической евклидовой модели (ГЕМ) основным инструментом построения ГММ является экономико-географический метод разграничения «областей влияния» станций отправления (см., например, [6;7]). Принципиальное отличие ГММ от ГЕМ состоит в том, что между станциями отправления и станциями назначения рассматривается не евклидово, а железнодорожное (тарифное) расстояние. Исходя из этого, для каждой станции отправления вводится такое понятие, как коэффициент дорожной непрямолинейности, который позволяет учитывать специфику расположения дорожной сети по отношению к этой станции отправления. Найденные для каждой станции отправления значения указанного коэффициента позволяют построить ГММ территориального олигополистического рынка транспортировки вагонов, образуемого совокупностью этих станций. Руководствуясь объемом статьи, ограничимся рассмотрением дуополистической ситуации.

Пусть l_e и l_m — евклидовы и железнодорожные (тарифные) расстояния от какой-либо станции отправления (из двух станций в данной ситуации) до станций назначения. Будем предполагать, что отно-

шение $\xi = \frac{l_m}{l_e}$ является случайной величиной, под-

чиняющейся равномерному закону распределения. Для станции отправления определим коэффициент дорожной непрямолинейности k , приняв его равным математическому ожиданию случайной величины ξ . Для равномерного теоретико-вероятностного распределения указанная числовая характеристика случайной величины равна среднему арифметическому ее значений, вычисленных для всех рассматриваемых станций назначения.

Предполагается, что на географической карте рассматриваемой части полигона введена (условная) декартова система координат. Она необходима для построения математической модели, позволяя воспользоваться методом аналитической геометрии. Пусть L — расстояние между 1-й и 2-й станциями отправления, которые находятся в точках $O(0,0)$ и $B(L,0)$. Пусть для i -й станции отправления k_i — коэффициент дорожной непрямолинейности, p_i и q_i — стоимости начально-конечных операций и стоимости движенических операций (на 1 км пути), затрачивае-

мые на один вагон ($i=1,2$). Тогда кривая на плоскости, разграничивающая «области влияния» станций отправления, задается неявным уравнением

$$p_1 + q_1 k_1 \sqrt{x^2 + y^2} = p_2 + q_2 k_2 \sqrt{(x-L)^2 + y^2}. \quad (1)$$

Входящие в уравнение (1) аналитические выражения показывают, что «области влияния» станций отправления разграничиваются в соответствии со стоимостью перевозки грузов от этих станций до станций назначения. Отметим, что линиями разграничения являются алгебраические кривые, вообще говоря, 4-го порядка и приведенное выше построение распространяется на олигополистическую ситуацию.

Численные данные, которые требуются при построении ГММ для рассматриваемого далее конкретного транспортно-логистического проекта, приведены в табл. 1.

На рис. 1 приведена полученная путем построения ГММ территориальная картина олигополистического рынка транспортировки порожних вагонов, создаваемого пятью станциями отправления.

Точка Ферма – Торричелли в нахождении местоположений станций временного размещения порожних вагонов

Будем рассматривать какую-либо из станций отправления порожних вагонов. Предположим, что

Таблица 1

Численные данные для станций отправления

Припортовая станция	p_i	q_i	k_i
Заречная	335,778	28,053	1,459
Азов	650,073	27,660	1,595
Таганрог	547,311	26,727	1,587
Ейск	1005,171	26,055	1,760
Темрюк	1266,564	25,235	1,491

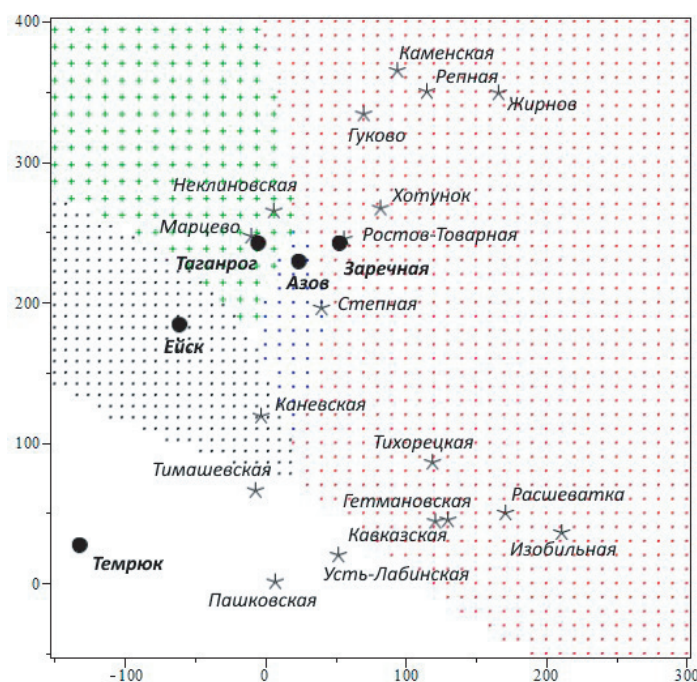


Рис. 1. Территориальная картина рынка транспортировки порожних вагонов, создаваемого пятью станциями отправления

в «области влияния» этой станции для очередной погрузки вагонов выделены n станций назначения, которые находятся в точках $A_i (a_i, b_i) (i=1, \dots, n)$. Согласно определению, точка Ферма–Торричелли для совокупности точек $A_i (i=1, \dots, n)$ обладает тем свойством, что в ней достигает наименьшего значения (на всей плоскости) функция $\sigma(x, y)$ двух независимых переменных [12;13]:

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}. \quad (2)$$

Считаем уместным замечание в отношении применяемых математических методов. Авторам не удалось воспользоваться стандартными приемами дифференциального исчисления для нахождения подозрительных на экстремум точек функции $\sigma(x, y)$ (в том числе, путем обращения к специализированным программным продуктам). Поэтому был разработан реализованный в среде Python вычислительный алгоритм, позволяющий решать указанную задачу приближенно для любых численных данных. Соответствующие графические построения выполнены в среде системы аналитических вычислений Maxima (Free Ware).

Точка Ферма–Торричелли в «области влияния» станции Заречная

На рис. 2 изображена кружком точка Ферма – Торричелли, найденная для шести станций назначения, расположенных в «северной» части «области влияния» припортовой станции отправления

Заречная. На практике найденная точка реализуется, например, местоположением станции Божковская (не рассматривалась в качестве станции назначения). Отметим, что географическая конфигурация шести станций такова, что они расположены в вершинах ломаной линии, ограничивающей невыпуклый шестиугольник. Станции назначения Ростов-Товарный и Хотунок находятся в «невыгодном» положении в том смысле, что для них указанная станция может быть использована (напомним, для временного размещения порожних вагонов) лишь в «крайних» случаях (например, если пути станций окажутся занятыми в ближайшие несколько суток).

Отметим также, что если ограничиться четырьмя станциями назначения Гуково, Каменская, Репная и Жирнов, то точка Ферма–Торричелли реализуется местоположением станции Репная.

На рис. 3 изображена кружком точка Ферма–Торричелли, найденная для пяти станций назначения, расположенных в «южной» части «области влияния» станции отправления Заречная (здесь также станции назначения являются вершинами невыпуклого многоугольника). Искомая точка практически реализуется местоположением станции назначения Гетмановская.

Точка Ферма–Торричелли в «области влияния» станции Темрюк

На рис. 4 изображена кружком точка Ферма–Торричелли, найденная для трех станций назначения,

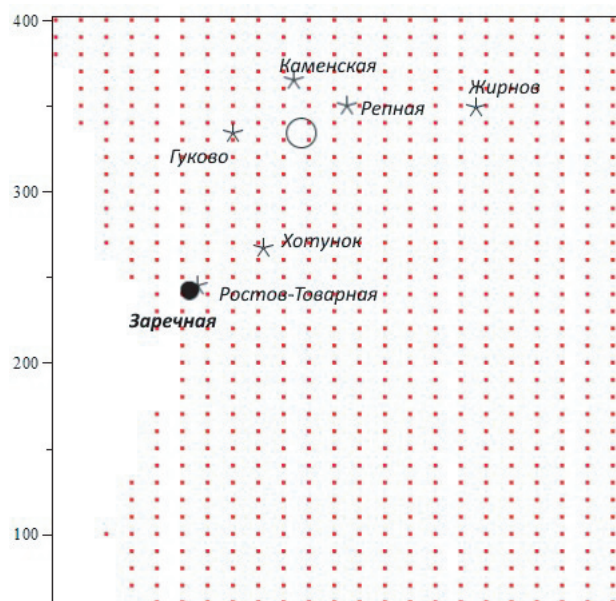


Рис. 2. Точка Ферма–Торричелли для шести станций назначения в «области влияния» станции отправления Заречная

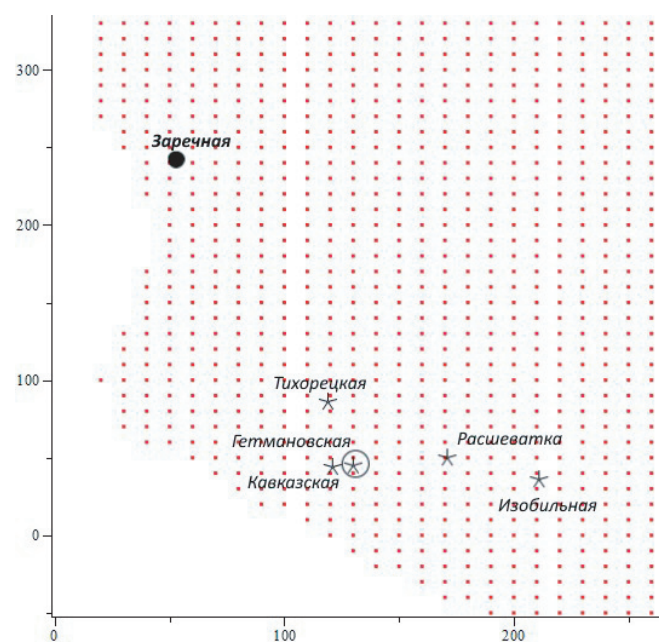


Рис. 3. Точка Ферма–Торричелли для пяти станций назначения в «области влияния» станции отправления Заречная

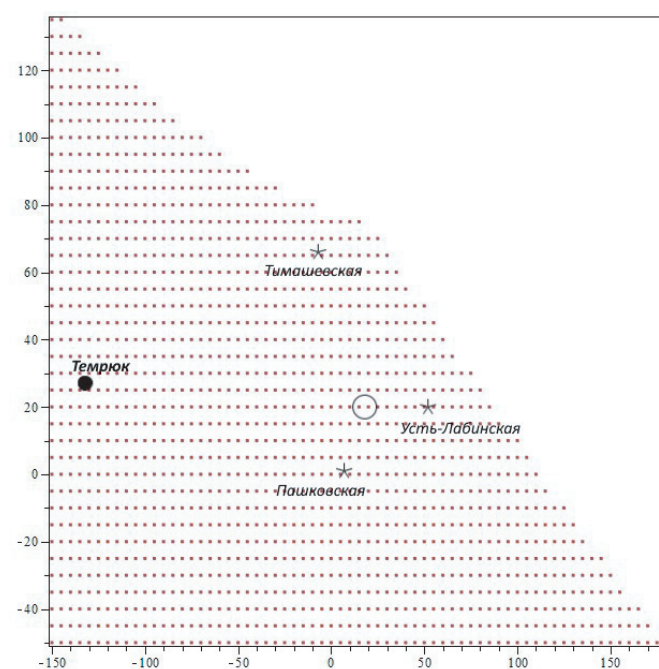


Рис. 4. Точка Ферма–Торричелли для трех станций назначения в «области влияния» станции отправления Темрюк

расположенных в «области влияния» станции отправления Темрюк. В соответствии с известным геометрическим свойством каждая из сторон треугольника, в вершинах которого расположены станции, видна из полученной точки под углом 120° .

Выводы

Классическое геометрическое понятие точки Ферма–Торричелли представляет собой эффективный и разносторонний математический инструмент исследования в области транспортной логистики. В результате его применения получает развитие геометрическая маршрутизационная модель олигополистического рынка услуг по транспортировке порожних вагонов, образуемого припортовыми станциями отправления на рассматриваемой части полигона.

Предложен подход в математическом моделировании процесса управления вагонопотоками, который позволяет теоретически обоснованно и практически эффективно находить оптимальные местоположения станций временного размещения порожних вагонов, отправляемых с припортовых станций выгрузки. Построен и реализован в программных средах Python и Maxima (Free Ware) алгоритм нахождения точек Ферма–Торричелли для групп станций назначения, входящих в «области влияния» станций отправления порожних вагонов.

Разработанная методика имеет перспективу развития в том плане, что для найденных местоположений станций временного размещения вагонов можно использовать понятие радиуса действия станции с целью охвата дополнительных областей обслуживания. На примерах показано, что подход реализуется для различных инфраструктурных вариантов и его использование позволяет снизить пробег порожних вагонов и тем самым сократить транспортные издержки.



Литература

1. Belousov, Fedor & Nevolin, Ivan & Khachatryan, Nerses. (2020). Modeling and optimization of plans for railway freight transport performed by a transport operator. Business Informatics. 14. 21-35. 10.17323/2587-814X.2020.2.21.35.
2. Chen, S.-B & He, S.-W & Liu, X.-C & Li, H.-D. (2015). Study on two-phase optimization models and algorithms for empty railcar dynamic distribution based on «Real Freight System». Tiedao Xuebao/Journal of the China Railway Society. 37. 1-8. 10.3969/j.issn.1001-8360.2015.05.001.
3. Zhu, Jianmei & Tan, Yunjiang & Yan, Haifeng. (2007). Model and Ant Colony Optimization Algorithms for Railway Empty Wagons Distribution. 3041-3047. 10.1061/40932(246)499.
4. Rakhmangulov, Aleksandr & Kolga, Anatoly & Osintsev, Nikita & Stoppovskikh, Ivan & Ślaskowski, Aleksander. (2014). Mathematical Model of Optimal Empty Rail Car Distribution at Railway Transport Nodes. Transport Problems. 9. 125.
5. Shatokhin, A, et al., 2022. Optimization of Empty Wagon Flows in the Formation of the Technical Work Plan for the Railway Network 61, 361365. - DOI: 10.1016/j.trpro.2022.01.058.
6. Задорожний, В.М. Геометрическая маршрутизационная модель нахождения рациональных распределений порожних вагонопотоков в припортовой транспортно-технологической системе / В. М. Задорожний, В. А. Богачев, Т. В. Богачев, А. С. Кравец. - Текст : непосредственный // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. - 2024. - № 2 (69). - С. 63-70. - DOI 10.52170/1815-9265_2024_69_63.
7. Задорожний, В.М. Рациональные распределения вагонопотоков операторской компании: разработка новых подходов в математическом моделировании / В. М. Задорожний, В. А. Богачев, Т. В. Богачев. - Текст : непосредственный // Транспорт: наука, техника, управление. Научный информационный сборник. - 2024. - № 1. - С. 29-34. - DOI: 10.36535/0236-1914-2024-01-5.
8. Москвичев, О. В. Системный анализ математических моделей размещения транспортно-логистических объектов различного уровня / О. В. Москвичев, Е. Е. Москвичева. - Текст : непосредственный // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. - 2022. - Т. 81. - № 3. - С. 267-276. - DOI: 10.21780/2223-9731-2022-81-3-267-276.
9. Лемперт, А. А. Алгоритм размещения логистических центров в заданной области при точечном и непрерывном распределении потребителей / А. А. Лемперт, Нгуен Гуй Лиен, Ле Куанг Мынг. - Текст : непо-

средственный // Известия Байкальского государственного университета. - 2016. - Т. 26, № 6. - С. 1031-1038. - DOI: 10.17150/2500-2759.2016.26(6).1031-1038.

10. Лемперт, А. А. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт, Д. С. Бухаров. - Текст : непосредственный // Управление большими системами: сборник трудов. - Москва : Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2013. - Вып. 41. - С. 270-284.

11. Развитие узловой терминально-складской инфраструктуры: модификация методов исследования и прогнозы / О. Н. Числов, В. А. Богачев, В. В. Трапенов [и др.]. - Текст : непосредственный // Бюллетень результатов научных исследований. - 2023. - № 3. - С. 46-57. - DOI: 10.20295/2223-9987-2023-3-46-57.

12. Boltjanski, V., Martini, H., Soltan, V. (1999). Median problems in location science. In: *Geometric Methods and Optimization Problems. Combinatorial Optimization*, vol 4. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5319-9_2.

13. Dalla, L. A note on the Fermat-Torricelli point of a d-simplex. *J. Geom.* 70, 38–43 (2001). <https://doi.org/10.1007/PL00000991>.