

РАСЧЕТ ВНУТРЕННИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ



Э.Х. Тасанг



О.В. Воронов

Изложена методика получения функций формы при расчете внутренних перемещений в балочных конечных элементах.

Ключевые слова: метод конечных элементов, шарнир, матрица жесткости, функции формы, универсальное уравнение прогибов

EDN: HSSMJJ

В области железнодорожного транспорта множество конструкций, элементы которых, в расчетных схемах при проектировании, можно представить стержнями (с точки зрения строительной механики), а сами конструкции — рамами, фермами, балками. Это, например, рычажная передача колодочного тормоза, ось колесной пары и т.д.

Самым широко применяемым методом расчета плоских стержневых конструкций является метод конечных элементов (МКЭ), из-за его универсальности и алгоритмичности.

МКЭ позволяет нахождение узловых глобальных, затем узловых локальных перемещений и нагрузок и построение эпюр продольных, поперечных усилий

и моментов между узлами стержней. Нахождение межузловых усилий не составляет затруднений и широко описано в литературных источниках.

Следующей задачей является нахождение межузловых (внутренних) перемещений.

Авторами многочисленных публикаций для нахождения межузловых перемещений предлагается применять в качестве аппроксимирующих функций формы полиномы Эрмита (функции формы) [2;3], метод начальных параметров (МНП) или универсальное уравнение прогибов (УУП) [1;8–10].

Следует заметить, что полиномы Эрмита получены для конечных элементов (стержней, балок), на которые внутри не действуют никакие нагрузки (распре-

Тасанг Эрик Хельмутович, старший преподаватель кафедры железнодорожного транспорта ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля». Область научных интересов: математическое моделирование и САПР в локомотивостроении. Автор более 100 научных работ, в том числе семи учебных пособий, одной монографии и шести учебников. Имеет 20 патентов на изобретения.

Воронов Олег Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных, естественно-научных и общепрофессиональных дисциплин филиала Ростовского государственного университета путей сообщения в г. Воронеж. Область научных интересов: экологическая безопасность на железнодорожном транспорте, в транспортном строительстве. Автор более 40 научных работ, в том числе шести учебников.

Иванова Елена Ивановна, старший преподаватель кафедры железнодорожного транспорта ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля». Область научных интересов: локомотивостроение, стандартизация и метрология. Автор более 20 научных работ, в том числе шести учебников.

Клюев Александр Семенович, старший преподаватель кафедры железнодорожного транспорта ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля». Область научных интересов: электрооборудование и электрические передачи локомотивов. Автор более 80 научных работ, в том числе трех учебных пособий и учебников. Имеет 17 патентов на изобретения.

деленные), а МКЭ не определяет углы поворота начал и концов стержней для шарнирно-подсоединенных стержней.

Применение метода начальных параметров или универсального уравнения прогибов предполагает наличие начальных параметров, в которые включены и углы поворота концов стержней с шарнирами, которые не определяются в МКЭ.

Исходя из этого, предлагается использование для нахождения межузловых перемещений полиномы Эрмита, а эти перемещения дополнять межузловыми перемещениями балочного элемента с распределенными нагрузками.

В данной работе приведен вывод выражений для расчета внутренних поперечных перемещений балочного элемента с распределенными нагрузками и любым сочетанием наличия шарниров на концах путем двойного интегрирования уравнения изгибающего момента в сечении между концами балки и использования начальных значений изгибающего момента, угла поворота и поперечного смещения сечения.

Для начала, примем положительные направления для перемещений и усилий: продольных по оси x — слева направо (x, N); поперечных по оси y — снизу вверх (y, Q); для угла поворота и изгибающего момента (φ, M); — против часовой стрелки.

Прежде чем начинать вывод уравнения изогнутой оси балки, вычислим начальные значения указанных величин.

Согласно теореме Кастилиано [5] частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы в направлении действия этой силы:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}, \quad (1)$$

где P — обобщенная сила; δ — линейное перемещение в направлении силы P .

В случае поперечной распределенной нагрузки q потенциальной энергии соответствует площадь эпюры прогибов балки в направлении действия q [5;6].

Реакции по концам балки от распределенной поперечной нагрузки для балок с различным сочетанием шарниров на концах определим следующим образом.

Балка без шарниров (тип 1, рис. 1).

Для этой балки функции формы (полиномы Эрмита):

$$N^1(z) = \left[\left(1 + \frac{2z^3}{L^3} - \frac{3z^2}{L^2} \right) \left(z + \frac{z^3}{L^2} - \frac{2z^2}{L} \right) \left(-\frac{2z^3}{L^3} + \frac{3z^2}{L^2} \right) \left(\frac{z^3}{L^2} - \frac{z^2}{L} \right) \right]^T. \quad (2)$$

Каждая из функций формы $N_i^1(z)$ описывает распределение перемещений $y(z)$ в балочном КЭ, когда соответствующее этой функции формы — i -е обобщенное узловое перемещение — равно единице, а остальные — равны нулю.

Тогда реакция по оси y (1-е направление, R_1^1) определится как:

$$R_1^1 = - \int_0^L q \cdot N_1^1(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(1 + \frac{2z^3}{L^3} - \frac{3z^2}{L^2} \right) dz = - \frac{q \cdot L}{2}. \quad (3)$$

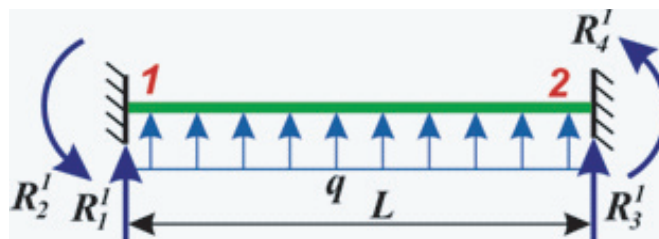


Рис. 1. Балка без шарниров. $R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1$ — реакции по направлениям 1–4.
1–2 направления: y и φ в начале стержня, 3–4 направления: y и φ в конце стержня

Знак — перед интегралом, чтобы определить не нагрузку, а реакцию.
 Таким же образом определим следующие реакции по рис. 1.

$$R_2^1 = - \int_0^L q \cdot N_2^1(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(z + \frac{z^3}{L^2} - \frac{2z^2}{L} \right) dz = - \frac{q \cdot L^2}{12}. \quad (4)$$

$$R_3^1 = - \int_0^L q \cdot N_3^1(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(-\frac{2z^3}{L^3} + \frac{3z^2}{L^2} \right) dz = - \frac{q \cdot L}{2}. \quad (5)$$

$$R_4^1 = - \int_0^L q \cdot N_2^1(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(\frac{z^3}{L^2} - \frac{z^2}{L} \right) dz = \frac{q \cdot L^2}{12}. \quad (6)$$

Балка с шарниром в начале (тип 2, рис. 2).
 Для этой балки функции формы:

$$N^2(z) = \left[\left(\frac{z^3}{2L^3} - \frac{3z}{2L} + 1 \right) \quad (0) \quad \left(\frac{3z}{2L} - \frac{z^3}{2L^3} \right) \quad \left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{2L^2} \right) \right]. \quad (7)$$

Реакции:

$$R_1^2 = - \int_0^L q \cdot N_1^2(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(\frac{z^3}{2L^3} - \frac{3z}{2L} + 1 \right) dz = - \frac{3 \cdot q \cdot L}{8}. \quad (8)$$

$$R_2^2 = - \int_0^L q \cdot N_2^2(z) dz = - \int_0^L q \cdot (0) dz = 0. \quad (9)$$

$$R_3^2 = - \int_0^L q \cdot N_3^2(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(\frac{3z}{2L} - \frac{z^3}{2L^3} \right) dz = - \frac{5 \cdot q \cdot L}{8}. \quad (10)$$

$$R_4^2 = - \int_0^L q \cdot N_2^2(z) dz = - \int_0^L q \cdot \left(\frac{z}{2} - \frac{z^3}{2L^2} \right) dz = \frac{q \cdot L^2}{8}. \quad (11)$$

Балка с шарниром в конце (тип 3, рис. 3).

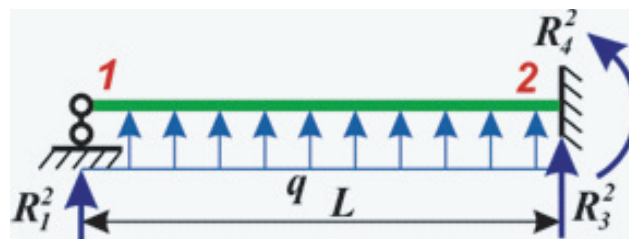


Рис. 2. Балка с шарниром в начале. $R_1^2, R_2^2, R_3^2, R_4^2$ – реакции по направлениям согласно рис. 1

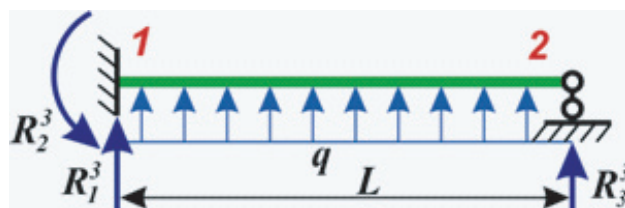


Рис. 3. Балка с шарниром в конце. $R_1^3, R_2^3, R_3^3, R_4^3$ – реакции по направлениям согласно рис. 1

Для этой балки функции:

$$N^3(z) = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{z^3}{2L^3} - \frac{3z^2}{2L^2}\right) & \left(z + \frac{z^3}{2L^2} - \frac{3z^2}{2L}\right) & \left(z + \frac{z^3}{2L^2} - \frac{3z^2}{2L}\right) & (0) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Реакции:

$$R_1^3 = -\int_0^L q \cdot N_1^3(z) dz = -\int_0^L q \cdot \left(1 + \frac{z^3}{2L^3} - \frac{3z^2}{2L^2}\right) dz = -\frac{5 \cdot q \cdot L}{8}. \quad (13)$$

$$R_2^3 = -\int_0^L q \cdot N_2^3(z) dz = -\int_0^L q \cdot \left(z + \frac{z^3}{2L^2} - \frac{3z^2}{2L}\right) dz = -\frac{q \cdot L^2}{8}. \quad (14)$$

$$R_3^3 = -\int_0^L q \cdot N_3^3(z) dz = -\int_0^L q \cdot \left(z + \frac{z^3}{2L^2} - \frac{3z^2}{2L}\right) dz = -\frac{3 \cdot q \cdot L}{8}. \quad (15)$$

$$R_4^3 = -\int_0^L q \cdot N_4^3(z) dz = -\int_0^L q \cdot (0) dz = 0. \quad (16)$$

Балка с шарнирами в начале и в конце (тип 4, рис. 4).

Для этой балки функции:

$$N^4(z) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{z}{L}\right) & (0) & \left(\frac{z}{L}\right) & (0) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Реакции:

$$R_1^4 = -\int_0^L q \cdot N_1^4(z) dz = -\int_0^L q \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right) dz = -\frac{q \cdot L}{2}. \quad (18)$$

$$R_2^4 = -\int_0^L q \cdot N_2^4(z) dz = -\int_0^L q \cdot (0) dz = 0. \quad (19)$$

$$R_3^4 = -\int_0^L q \cdot N_3^4(z) dz = -\int_0^L q \cdot \left(\frac{z}{L}\right) dz = -\frac{q \cdot L}{2}. \quad (20)$$

$$R_4^4 = -\int_0^L q \cdot N_4^4(z) dz = -\int_0^L q \cdot (0) dz = 0. \quad (21)$$

Определим выражение вертикальных прогибов от распределенной нагрузки на примере балки без шарниров.

Запишем уравнение суммы поперечных усилий относительно сечения z (см. рис. 5).

$$\sum Q = 0; Q(z) = R_1 \cdot z + q \cdot z = 0; Q(z) = R_1 + q \cdot z. \quad (22)$$

Запишем уравнение суммы моментов относительно сечения z (рис. 5).

$$\sum M = 0; M(z) + R_2 - R_1 \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2} = 0; M(z) = -R_2 + R_1 \cdot z + q \cdot \frac{z^2}{2}. \quad (23)$$

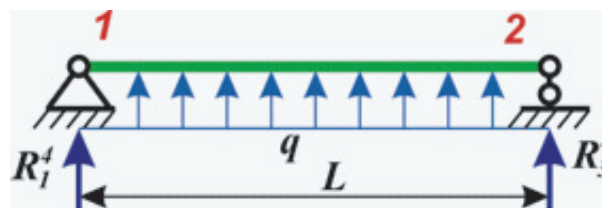


Рис. 4. Балка с шарнирами в начале и в конце. $R_1^4, R_2^4, R_3^4, R_4^4$ – реакции по направлениям согласно рис. 1

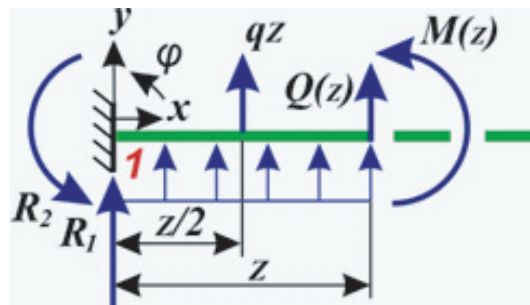


Рис. 5. Левая отсеченная часть балки

Уравнение для углов поворота сечения:

$$\varphi(z) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int \left(-R_2 + R_1 \cdot z + q \cdot \frac{z^2}{2} \right) dz = \varphi_n + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-R_2 \cdot z + R_1 \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{z^3}{6} \right), \quad (24)$$

где E — модуль упругости материала; I — осевой момент инерции сечения относительно оси x .

Уравнение прогибов сечения:

$$(z) = \int \left[\varphi_n + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-R_2 \cdot z + R_1 \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{z^3}{6} \right) \right] dz = y_n + \varphi_n \cdot z + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-R_2 \cdot \frac{z^2}{2} + R_1 \cdot \frac{z^3}{6} + q \cdot \frac{z^4}{24} \right). \quad (25)$$

Величины y_n и φ_n — значения прогиба и угла поворота начального узла 1.

Выражения (23;24) представляют собой аналог универсальных уравнений [5]. Реакции R определены ранее и приведены в (3–6;8–11;13–16;18–21).

Осталось определить для различных сочетаний наличия шарниров величины y_n и φ_n .

Примем i — номер типа балки: $i=1$ — балка без шарниров; $i=2$ — балка с шарниром в начале; $i=3$ — балка с шарниром в конце; $i=4$ — балка с шарнирами в начале и конце. Тогда вектор поперечных начальных и конечных смещений для различных типов балки:

$$y_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; y_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (26)$$

Начальные и конечные углы поворота для защемленных концов балки (первый индекс — тип балки; второй — начало или конец балки):

$$\varphi_{1,n} = \varphi_{1,k} = \varphi_{2,k} = \varphi_{3,n} = 0. \quad (27)$$

Определим угол поворота в начале балки типа 2 ($i=2$). Запишем выражение для угла поворота сечения при $z=L$:

$$\varphi(z=L) = \varphi_{2,n} + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-0 \cdot z - \frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \cdot \frac{L^2}{2} + q \cdot \frac{L^3}{6} \right) = \varphi_{2,k} = 0; \varphi_{2,n} = \frac{q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}. \quad (28)$$

Угол поворота в конце балки типа 3 ($i=3$). Запишем выражение для поперечного смещения сечения при $z=L$:

$$\varphi_{4,n} = \varphi(z=L) = 0 + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{q \cdot L^2}{8} \cdot L - \frac{5 \cdot q \cdot L}{8} \cdot \frac{L^2}{2} + q \cdot \frac{L^3}{6} \right) = -\frac{q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}. \quad (29)$$

Угол поворота в начале балки типа 4 ($i=4$). Запишем выражение для поперечного смещения сечения при $z=L$:

$$y(z=L) = 0 + \varphi_{4,n} \cdot L + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-0 \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{L^3}{6} + q \cdot \frac{L^4}{24} \right) = \varphi_{2,k} = 0; \varphi_{4,n} = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}. \quad (30)$$

Угол поворота в конце балки:

$$\varphi_{4,к} = y(z=L) = \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-0 \cdot z - \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{L^2}{2} + q \cdot \frac{L^3}{6} \right); \varphi_{4,к} = -\frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}. \quad (31)$$

В результате получим:

Уравнение для поперечных усилий в сечении:

$$Q(z) = Q_n + q \cdot z. \quad (32)$$

Уравнение для изгибающих моментов в сечении:

$$M(z) = -M_n + Q_n \cdot z + q \cdot \frac{z^2}{2}. \quad (33)$$

Уравнение для углов поворота сечения:

$$\varphi(z) = \varphi_n + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-M_n \cdot z + Q_n \cdot \frac{z^2}{2} + q \cdot \frac{z^3}{6} \right). \quad (34)$$

Уравнение прогибов сечения:

$$y(z) = y_n + \varphi_n \cdot z + \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(-M_n \cdot \frac{z^2}{2} + Q_n \cdot \frac{z^3}{6} + q \cdot \frac{z^4}{24} \right), \quad (35)$$

где

$$y_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad (36)$$

$$\varphi_n = \left[0 \quad \frac{q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad 0 \quad \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} \right]^T; \quad (37)$$

$$Q_n = \left[-\frac{q \cdot L}{2} \quad -\frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \quad -\frac{5 \cdot q \cdot L}{8} \quad -\frac{q \cdot L}{2} \right]^T; \quad (38)$$

$$M_n = \left[-\frac{q \cdot L^2}{12} \quad 0 \quad -\frac{q \cdot L^2}{8} \quad 0 \right]^T. \quad (39)$$

Построим графики зависимостей (32–35) при следующих параметрах: $E = 2 \cdot 10^8$ кПа; $I = 7,08 \cdot 10^{-6}$ м⁴;

$L = 3$ м; $N = 25$ — число разбиений длины балки; $i = 1 \dots N$ — номер разбиения; $z_i = \frac{L}{N-1} \cdot i$.

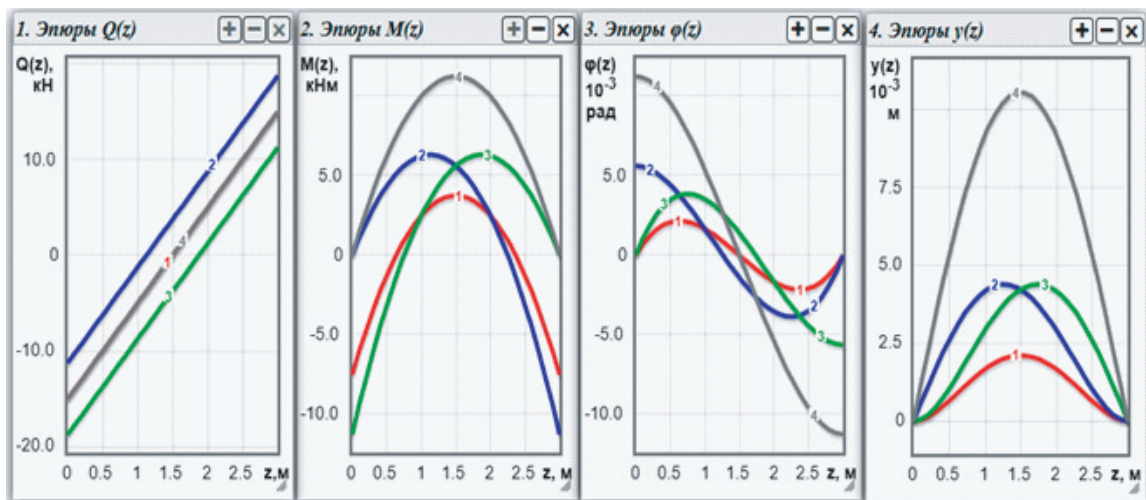


Рис. 6. Графики зависимостей $Q(z)$, $M(z)$, $\varphi(z)$, $y(z)$ от местоположения сечения z балки. 1, 2, 3, 4 – тип балки

Выводы

Приведены выражения для реакций на концах балочных элементов с различным сочетанием шарниров на концах от поперечной распределенной нагрузки путем интегрирования аппроксимирующих полиномов вдоль длины балки.

Получены универсальные выражения для построения эпюр поперечных нагрузок, изгибающего момента, угла поворота сечения и поперечного прогиба для балочных элементов по п.1.

Приведенные выражения позволяют, в дополнении аппроксимирующими полиномами, более корректно строить поля перемещений внутри стержней с шарнирами для плоских рам.

Приведенные выражения использованы для построения поля перемещений внутри стержней в программе «МКЕ_V11.html», программная оболочка которой и описание приведены в [7;8]. 

Литература

1. Каменев, С. В. Основы метода конечных элементов в инженерных приложениях: учебное пособие / С. В. Каменев. - Оренбург : ОГУ, 2019. - 110 с. - Текст : непосредственный.
2. Дьяков, И. Ф. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие / И. Ф. Дьяков, С. А. Чернов, А. Н. Черный. - Ульяновск : УлГТУ, 2010. - 133 с. - Текст : непосредственный.
3. Гайджуров, П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания: учебное пособие / П. П. Гайджуров. - Новочеркасск : ЮРГТУ, 2009. - 195 с. - Текст : непосредственный.
4. Жернаков, В. С. Сопротивление материалов — механика материалов и конструкций: учебник / В. С. Жернаков. - Уфа: УГАТУ, 2012. - 495 с.
5. Букатый, А. С. Определение перемещений стержневых систем методами сопротивления материалов: учебное пособие / А. С. Букатый, С. А. Букатый. - Самара : Издательство Самарского университета, 2022. - 92 с.
6. Белкин, А. Е. Расчет плоских рам методом перемещений : учебное пособие / А. Е. Белкин, Н. Л. Нарская. - Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. - 32 с. - Текст : непосредственный.
7. Методика расчёта межузловых перемещений в стержневых конечных элементах / Э. Х. Тасанг, О. В. Воронов, В. В. Быкадоров, Л. И. Тишук, Е. И. Иванова, А. С. Ключев. - Текст : непосредственный // В сборнике: Транспорт: наука, образование, производство («Транспорт-2021»). - Воронеж, 19-21 апреля 2021 года : труды Международной научно-практической конференции: секция «Теоретические и практические вопросы транспорта». - Воронеж : филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ростовский государственный университет путей сообщения» в г. Воронеж, 2021. - С. 28-35.
8. Строительная механика железнодорожного подвижного состава : учебник / Э. Х. Тасанг, В. В. Быкадоров, О. В. Воронов, А. С. Ключев, Е. И. Иванова, Л. И. Тишук. - Воронеж : Изд-во филиала РГУПС в г. Воронеж, 2021. - 168 с. - Текст : непосредственный.
9. Li, Y., Liu, Y. A General Solution for the Deflection of Beams with Arbitrary Loading and Support Conditions / International Journal of Engineering Education, 20(5), 792-798. 2004.
10. Jármai, K., Snyman, E., & Farkas A novel finite element for geometric nonlinear analysis of Euler–Bernoulli beams under distributed load / Acta Technica Jaurinensis, 13(2), 108-129. 2020.