

АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАССАЖИРОПОТОКОВ ПО ВРЕМЕНИ И ПО МАРШРУТАМ ОБЩЕСТВЕННОГО ТРАНСПОРТА С УЧЕТОМ РАСПИСАНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЙ ПРОВОЗНОЙ СПОСОБНОСТИ



А.А. Попов

Выполнен обзор и анализ существующих алгоритмов распределения пассажиропотоков по сетям маршрутного транспорта. Разработан алгоритм распределения пассажиропотоков по времени и по маршрутам общественного транспорта с учетом расписаний движения и ограничений провозной способности. Алгоритм реализован и апробирован в компьютерной программе для прогнозирования распределения пассажирских потоков в маршрутной системе транспорта общего пользования.

Ключевые слова: распределение пассажирских потоков, динамическое макро моделирование системы транспорта общего пользования

EDN: SHSZMU

Городской пассажирский транспорт нуждается в эффективном планировании, проектировании и реализации. Необходимо, чтобы транспортная система удовлетворяла транспортные потребности города с минимальными транспортными издержками. Для оптимизации системы общественного транспорта необходимы инструменты прогнозирования и моделирования пассажирских потоков. Методы распределения пассажирских потоков, рассмотренные в данной статье, являются разделом транспортного моделирования. Сложность и трудоемкость транспортных расчетов требует использования эффективных алгоритмов для вычислительной техники.

Статья посвящена изучению и развитию алгоритмов распределения пассажирских потоков по маршру-

тной сети транспорта общего пользования (ТОП) в транспортных макро моделях.

Обзор существующих алгоритмов распределения пассажирских потоков маршрутного транспорта

Разработкой алгоритмов распределения потоков по транспортным сетям отечественные и зарубежные исследователи занимаются уже более полувека. Используются несколько методов распределения.

1. Распределение по одному кратчайшему пути (метод «всё или ничего») и его модификации (штраф за повороты, распределение порциями).

2. Распределение по нескольким путям (ограничение пропускной способности, отвод на скоростные дороги).

Попов Алексей Александрович, кандидат технических наук, инженер-математик отдела разработки алгоритмов ООО «Транснет», доцент Высшей инженерной школы Российского университета транспорта (РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: динамика подвижного состава железнодорожного транспорта, математическое моделирование динамических систем. Автор более 90 научных работ. Имеет один патент на изобретение.

3. Распределение по неограниченному множеству путей (метод стока, физические аналогии, равновесное статическое распределение).

4. Динамическое распределение (метод последовательного заполнения, метод последовательных средних, динамическое пользовательское равновесие).

Основными достоинствами метода «всё или ничего» являются простота и малое время счета. Сила этих достоинств такова, что этот метод используется до сих пор в качестве части более сложных методов.

Если при эксплуатации метода «всё или ничего» сеть ТОП и улично-дорожная сеть нагружались абсолютно идентично, то при распределении потоков на группу путей появилась необходимость учитывать специфические особенности обоих видов транспорта с точки зрения формирования путей следования и закономерностей их выбора (модель оптимальных стратегий).

Достоинством модели оптимальных стратегий является учет множества путей (маршрутов), по которым пассажир может достичь пункта тяготения, и вероятности обслуживания на каждом маршруте. Недостатком этой модели является отсутствие учета ограничений провозной способности и расписаний движения транспорта.

Для обоснования проектных решений генерального плана города используются укрупненные транспортные статические макромодели с распределением потоков по множеству путей без ограничений пропускной способности — в результате определяется распределение спроса на магистральную транспортную сеть города, служащее основой для классификации и проектирования элементов этой сети.

Для планирования транспортного обслуживания массовых мероприятий целесообразно использовать динамическое распределение пассажиропотоков методом последовательного заполнения с учетом ограничений провозной способности транспорта (когда пассажир не владеет информацией о будущем изменении состояния транспортной сети и выбирает путь, исходя из состояния сети в момент его отправления).

Для оптимизации общественного транспорта при обслуживании ежедневных (устоявшихся) пассажиропотоков рекомендуется использовать динамическое пользовательское равновесие (ни один пассажир не может снизить свои затраты, переключившись на другой маршрут). В контексте планирования динамическое пользовательское равновесие обычно моделируется для дневной временной шкалы на основе транспортного спроса, установленного в типовой день.

Вопросом для исследования является характер зависимости сопротивления сети общественного

транспорта от ее загрузки (пассажиропотока) и сходимость динамического равновесного распределения.

Анализ литературы показал недостаточную изученность методов равновесного динамического распределения пассажиропотоков по времени и по маршрутам общественного транспорта с учетом расписаний движения и ограничений провозной способности.

Разработка алгоритма распределения пассажиропотоков

Методика распределения пассажиропотоков с ограничениями провозной способности рассматривает динамическое изменение распределения пассажирских потоков по сети маршрутов общественного транспорта с течением времени.

Добавление шкалы времени для состояния (загрузки и сопротивления) транспортной сети увеличивает вычислительную емкость расчета, но позволяет достичь качественного увеличения возможностей моделирования [12].

Учет расписания ТОП при распределении пассажиропотоков требует учета динамики транспортного спроса и динамики распределения пассажиропотоков по времени, что обусловило выбор динамической транспортной макромодели для решения данной задачи.

Разработан алгоритм распределения пассажиропотоков по времени и по маршрутам ТОП с учетом расписаний движения и ограничений провозной способности. Алгоритм позволяет учитывать строгие ограничения провозной способности маршрутов общественного транспорта и при этом достигать динамического пользовательского равновесия распределения пассажиропотоков.

Блок-схема алгоритма представлена на рисунке.

Алгоритм начинается с блока подготовки массивов (структур) данных для расчета:

- подготовка расчетного графа транспортной сети с маршрутами общественного транспорта [10;11];
- подготовка массивов исходных данных: цены дуг графа $C(r,t)$, пропускная/провозная способность $PO(r,t)$ дуг графа r в каждый интервал времени t , матрица корреспонденций, профиль спроса;
- подготовка массивов промежуточных данных (используются в процессе расчета): массив спроса $\{PT(i,j,t)\}$ (распределение корреспонденций по времени), где $PT(i,j,t)$ — (квант спроса) часть корреспонденции $P(i,j)$ выезжающая из района отправления i в интервал времени t ; массив спроса по дугам $\{PL(r,t)\}$, где $PL(r,t)$ — спрос по дуге r в интервал времени t . Деревья кратчайших путей: $\{tree(r)\}$, где $tree(r)$ — номер участка (дуги), предшествующего дуге r вдоль кратчайшего пути. Кратчайший путь $i \rightarrow j$ может быть

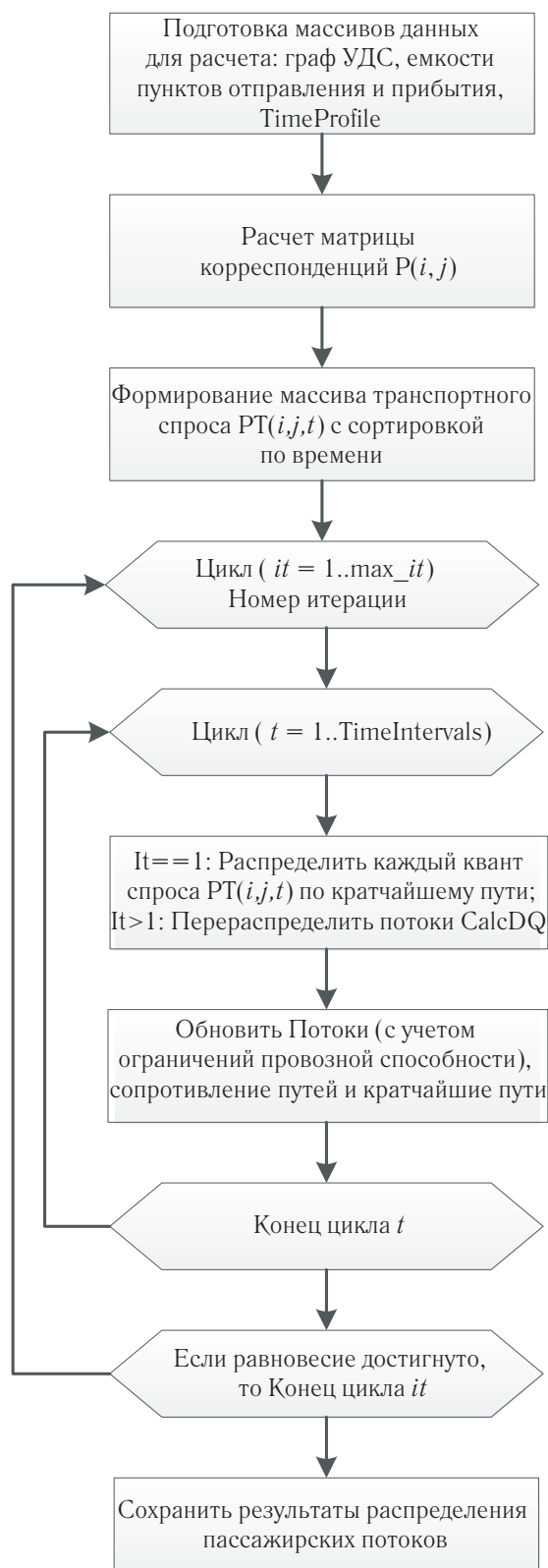


Рисунок. Блок-схема алгоритма

получен из дерева (i) (i — корень дерева кратчайших путей) перебором дуг от конечного узла j к корню дерева (i) . В процессе построения дерева кратчайших путей вычисляется массив цен (потенциалов) от корня дерева i до каждого узла графа j : $\{cost(j)\}$ [в минутах].

- подготовка массивов выходных данных: $Q(r,t)$ — поток по дуге r в интервал времени t ; $C(r,t)$ — цена прохождения дуги r в интервал времени t .

Данный алгоритм позволяет распределять пассажиропотоки как с учетом расписания движения ТОП, так и с учетом интервалов движения ТОП (если расписание неизвестно). Отличие распределения по расписанию от распределения по интервалам заключается в подготовке разных значений массивов $PO(r,t)$ и $C(r,t)$.

Посадочные дуги имеют цену $C(r,t)$, учитывающую длительность ожидания ТОП, стоимость проезда, а также могут включать дополнительные задержки от переполнения подвижного состава ТОП.

Для распределения пассажиропотоков по интервалам исходная провозная способность PO и задержка на посадочных дугах не зависят от времени: для каждого t задается средняя провозная способность [маршрутного ребра]:

$$PO(r,t) = \text{MarshPO}(r) \cdot \text{TimeStep} / 60 \text{ [пассажиров за интервал времени]},$$

где $\text{MarshPO}(r)$ — провозная способность маршрута [пасс/час], проходящего по маршрутной дуге r :

$$\text{MarshPO} = 60 \cdot \Omega / t_m,$$

где Ω — вместимость подвижного состава ТОП [пасс], t_m — маршрутный интервал движения [мин].

TimeStep — длительность интервала времени [мин], 60 — минут в час; и средняя задержка [посадочного ребра]:

$$DC(r,t) = t_m / 2.$$

Для распределения по расписанию провозная способность и задержка на посадочных дугах зависят от времени: если в интервале времени t нет отправок ТОП, то провозная способность маршрутного ребра $PO(r,t)=0$ (бесконечно малая величина), а посадочное ребро $r1$, предшествующее данному маршрутному ребру r , имеет задержку $DC(r1,t)$ равную времени ожидания ТОП; если в интервале времени t есть отправление ТОП, то $PO(r,t)$ увеличивается на вместимость отправляющегося транспортного средства.

Второй блок алгоритма включает загрузку матрицы корреспонденций. Матрица (матрицы) корреспонден-

денций $\{P(i,j)\}$ загружается из предыдущего шага расчета (trip matrix для общественного транспорта). Для каждой матрицы корреспонденций загружается свой профиль спроса $\{TimeProfile(t)\}$. Как правило, используется суточная матрица корреспонденций (распределение транспортного спроса по пунктам отправления и тяготения), полученная аналогично статической макромоделю. В качестве альтернативного метода возможна загрузка матрицы корреспонденций для каждого шага времени t (загрузка массива транспортного спроса).

Третий блок алгоритма формирует массив транспортного спроса. Массив транспортного спроса рассчитывается как произведение матрицы корреспонденций на профиль спроса:

$$PT(i,j,t) = P(i,j) \cdot TimeProfile(t)$$

— для каждого набора i,j,t получаем распределение корреспонденций по времени.

Следующий блок алгоритма — начало цикла итераций равновесного распределения пассажиропотоков. Динамическое пользовательское равновесие — такое распределение потоков, при котором в момент времени t между парой пунктов отправления-прибытия ни один пассажир не может снизить свои затраты, переключившись на другой маршрут (цены путей равны).

Балансировка (равновесие) распределения достигается итерационным методом. На каждой итерации выполняется обновление деревьев кратчайших путей, обновление потоков, обновление времени в пути. Итерации продолжаются, пока не будут выполнены критерии сходимости (если изменение потоков или сопротивлений между итерациями меньше допустимой погрешности).

Внутри цикла равновесного распределения выполняется цикл интервалов времени.

Время t моделируется в течение моделируемого периода T : $t=0 \dots T$.

В течение моделируемого периода время дискретизируется на шаги (интервалы) времени — моделируемый период делится на конечное число шагов IntervalCount. В каждый интервал времени строятся деревья кратчайших путей, рассчитывается транс-

портный спрос, транспортный поток на каждом участке транспортной сети и состояние (задержки) транспортной сети.

Транспортная сеть заполняется последовательно по времени — от ранних интервалов времени к поздним — для учета загрузки сети от предыдущих интервалов времени на последующих интервалах времени.

Распределение спроса

На первой итерации выполняется процедура начального распределения пассажиропотоков по сети по кратчайшим путям:

- для данного интервала времени t построены деревья кратчайших путей из каждого района отправления i (i — корень дерева кратчайших путей);
- для каждого дерева i для каждого района прибытия j проходим вдоль кратчайшего пути и для каждой дуги $r \in$ кратчайшему пути $i \rightarrow j$: увеличиваем спрос¹ по дуге r на $PT(i,j,t)$;
- выполняем обновление потоков² $Q(r,t)$ на основе спроса $PL(r,t)$.

На следующей итерации выполняется процедура перераспределения пассажиропотоков:

- для каждого кванта спроса $PT(i,j,t)$ сохранен кратчайший путь из предыдущей итерации и из текущей итерации;
- процедура перераспределения пассажиропотоков переносит долю спроса со старого пути на новый путь с целью уравнивания цен альтернативных путей (возможен перенос всего спроса на новый путь); затем обновляет потоки и цены по дугам.

Разделение массивов потока $Q(r,t)$ и спроса $PL(r,t)$ необходимо, потому что в процессе перераспределения потоков между путями меняются цены путей и координата t для потоков (а для спроса координата t не меняется).

Обновление потоков, состояния сети и кратчайших путей

После изменения массива спроса $PL(r,t)$ необходимо обновление массива потоков $Q(r,t)$.

Процедура обновления потоков $Q(r,t)$ с учетом ограничений провозной способности:

¹ Спрос по дуге $PL(r,ti)$ имеет координату времени $ti=t+\text{cost}[\text{Road}[r],N1]$ — номер интервала времени, в который этот квант спроса $PT(i,j,t)$ пройдет по участку r без учета задержек, вызванных ограничениями провозной способности, с учетом длительности проезда от узла i до участка r .

² Поток по дуге $Q(r,ti)$ имеет вычисляемую координату времени ti — номер интервала времени, в который этот квант спроса $PT(i,j,t)$ пройдет по участку r с учетом задержек, вызванных ограничениями провозной способности (и возможными очередями).

- для каждого маршрута общественного транспорта во время отправления подвижного состава обслуживается транспортный спрос, который в это время находится на остановочном пункте; при этом учитываются ограничения вместимости подвижного состава, а также приоритет пассажиров, которые находятся в подвижном составе, перед пассажирами, которые ожидают посадки;

- транспортный спрос обслуживается с учетом очереди — кто первый пришел, тот первый обслужился, а также с учетом распределения обслуживания по времени (ожидания обслуживания).

Эти блоки алгоритма повторяются для каждого интервала времени в пределах периода моделирования.

Если выполнены критерии сходимости (если изменение потоков или сопротивлений между итерациями меньше допустимой погрешности) или номер итерации достиг ограничения количества итераций, то завершается цикл итераций равновесного распределения.

Сохранение результатов распределения пассажиропотоков

Для удобства представления результатов распределения пассажиропотоков для пользователя необходимо спроецировать расчетные потоки $Q(r, t)$ с расчетного графа на маршруты ТОП или на участки улично-дорожной сети. Результаты сохраняются (выводятся) в табличном и/или графическом виде: для каждого маршрута ТОП выводятся таблицы/диаграммы пассажиропотоков по перегонам, картограммы пассажиропотоков; для сети — картограмма пассажиропотоков ТОП для выбранного периода или интервала времени.

Испытание алгоритма

В рамках следующего этапа работы была проведена проверка работы нового алгоритма распределения пассажирских потоков.

Проверялся алгоритм динамического равновесного распределения пассажирских потоков по сети ТОП с учетом расписаний и ограничений провозной способности транспорта общего пользования, разработанный на предыдущем этапе работы.

Цели проверки — подтвердить способность алгоритма распределять пассажирские потоки по маршру-

тной сети ТОП с учетом расписаний и ограничений провозной способности ТОП и достигать динамического пользовательского равновесия.

Для испытания алгоритма использовалась синтетическая транспортная модель, специально разработанная для проверки способности алгоритма выполнять динамическое равновесное распределение пассажирских потоков по маршрутам транспорта общего пользования (ТОП) с учетом расписаний движения и ограничений провозной способности общественного транспорта.

Данный пример способен продемонстрировать преимущества алгоритма: в примере созданы условия для проверки ограничений провозной способности ТОП, для проверки возможности отказа пассажиров от ранее выбранных (по пустой сети) «кратчайших» путей в пользу путей, ставших кратчайшими в результате изменения состояния сети (в результате загрузки сети). В то же время пример должен быть достаточно простым для возможности теоретического расчета вручную для проверки результата.

Расчет динамического равновесного распределения пассажиропотоков ТОП с учетом расписаний и ограничений провозной способности ТОП выполняется итерационным методом.

На начальной итерации кратчайшие пути от пунктов отправления до пунктов прибытия прокладываются по «пустой» сети.

Но в процессе распределения пассажиропотоков образуются очереди пассажиров, ожидающих обслуживания, которые приводят к изменениям кратчайших путей. Более того — условия динамического равновесного распределения при полной осведомленности³ пассажиров приводят к отказу пассажиров от ранее выбранных (по пустой сети) «кратчайших» путей в пользу путей, ставших кратчайшими в результате изменения состояния сети (в результате загрузки сети).

При распределении пассажиропотоков учитывается приоритет в обслуживании пассажиров, севших в автобус первыми, а также учитываются строгие ограничения провозной способности маршрутов ТОП.

В пределах одного шага времени возможно некоторое множество решений, внутри которого перераспределение потоков не приводит к изменению цены передвижений.

³ Полная осведомленность пассажиров — пассажиры знают состояние сети (загрузку и сопротивление) в каждый момент времени и знают, как будет изменяться состояние сети со временем. Примером такой модели может служить распределение пассажиров, ежедневно совершающих поездки из дома на работу.

Результаты испытаний

Успешно выполнена проверка ограничения провозной способности, равновесного распределения пассажиропотоков, учета расписания ТОП:

- в одной модели движение ТОП задано и расписаниями и интервалами; для каждого шага времени моделирования расписание движения (отправления) ТОП влияет на задержки пассажира при посадке в ТОП;

- тестовый пример демонстрирует корректный учет строгих ограничений провозной способности ТОП, их влияние на очереди и задержки пассажиров;

- тестовый пример демонстрирует корректное уравновешивание пассажиропотоков, корректный учет очередей и приоритета обслуживания пассажиров при посадке в ТОП. Условия динамического равновесного распределения при полной осведомленности пассажиров приводят к отказу пассажиров от ранее выбранных (по пустой сети) «кратчайших» путей в пользу путей, ставших кратчайшими в результате изменения состояния сети (в результате загрузки сети).

В результате тестирования не было выявлено ситуаций, говорящих о ненадлежащей работе алгоритмов и интерфейса. На точность распределения влияет выбор шага времени распределения — чем меньше шаг времени, тем выше точность, но при уменьшении шага времени увеличивается количество интервалов времени и увеличивается вычислительная емкость расчета.

По результатам расчета выявлено совпадение расчетных данных и данных, полученных теоретическим путем. Что говорит о высокой точности алгоритма и соответствии алгоритма предъявляемым к нему требованиям.

Заключение

В данной статье выполнен обзор и анализ существующих алгоритмов распределения пассажирских потоков ТОП. Выделены две группы моделей распределения: статические и динамические.

Статические модели распределения пассажиропотоков к настоящему времени достаточно хорошо изучены и проработаны. Они рассматривают установившееся (статическое) состояние транспортной системы в условный час «пик», не учитывают шкалу времени и динамику процессов. Их достоинствами являются изученность, предсказуемость, относительно высокая скорость расчета, что обуславливает их области применения — распределение транспортного спроса без ограничений провозной способности ТОП на стадиях градостроительного проектирования, проектирования систем городского электротранспорта. Они позволяют рассчитать распределение существующего и перспективного транспортного спроса по

элементам транспортной сети, по маршрутам ТОП, определить пиковые (расчетные) уровни загрузки. Но их недостатки — неспособность корректно учитывать ограничения провозной способности, динамику транспортного спроса, пассажиропотоков и загрузки транспортной сети — не позволяют их использовать для детального моделирования организации транспортного обслуживания, процессов транспортного обслуживания, где необходим учет ограничений провозной способности, длительности пиковых периодов, неравномерности транспортного спроса и динамики состояния транспортной сети во времени.

Динамические модели распределения пассажиропотоков в настоящее время являются развивающейся областью исследований. Они учитывают шкалу времени и позволяют корректно учитывать ограничения провозной способности, динамику транспортного спроса, пассажиропотоков и загрузки транспортной сети, что является их преимуществом перед статическими моделями. Область применения динамических моделей распределения пассажиропотоков — детальное планирование, организация транспортного обслуживания пиковых периодов, массовых мероприятий, оптимизация маршрутных систем и расписаний движения ТОП с учетом динамики транспортного спроса во времени, ограничений провозной способности и длительности очередей (длительности пиковых периодов). Недостатками таких моделей являются: относительно большая ресурсоемкость вычислений, требовательность к исходным данным (расписание движения ТОП, динамика транспортного спроса), проблемы равновесного распределения.

В результате анализа существующих алгоритмов распределения пассажиропотоков определена потребность в разработке алгоритма динамического распределения пассажиропотоков ТОП с учетом ограничений провозной способности, с возможностью одновременного учета расписаний и интервалов движения ТОП, и возможностью расчета равновесного распределения пассажиропотоков (динамического пользовательского равновесия). Данный алгоритм разработан и описан в третьей части работы и предлагается для внедрения.

Алгоритм реализован в компьютерной программе и испытан на синтетическом тестовом примере.

Испытания подтвердили преимущества этого алгоритма:

- учет расписаний и/или интервалов движения ТОП: движение ТОП может быть задано и расписаниями и интервалами в одной модели;

- учет строгих ограничений провозной способности ТОП: количество перевозимых пассажиров меньше или равно вместимости подвижного состава ТОП;

- корректный учет очередей и приоритета обслуживания пассажиров при посадке в ТОП: приоритетное обслуживание пассажиров, которые раньше сели в ТОП, учет длительности ожидания обслуживания;
- динамическое равновесное распределение пассажиропотоков: ни один пассажир не может уменьшить цену своего передвижения, изменив маршрут.

В результате испытаний алгоритма подтверждена надлежащая работа алгоритма: по результатам расчета выявлено совпадение расчетных данных и данных, полученных теоретическим путем. 

Литература

1. Ефремов, И. С. Теория городских пассажирских перевозок : учебное пособие для вузов по специальности «Городской электрический транспорт» / И. С. Ефремов, В. М. Кобозев, В. А. Юдин. - Москва : Высшая школа, 1980. - Текст : непосредственный.
2. Яковлев, Л. А. Программное обеспечение технического расчета системы городских путей сообщения, представленной в сетевой форме (ЭВМ «Минск-22») / Л. А. Яковлев ; ЦНИИП градостроительства. - Москва : Стройиздат, 1976. - 135 с. - Текст : непосредственный.
3. Кривошеев, Д. П. Методы распределения пассажиропотоков в транспортных расчетах (Обзор) / Д. П. Кривошеев. - Москва : Центр научно-технической информации по гражданскому строительству и архитектуре, 1974. - 40 с. - Текст : непосредственный.
4. Моделирование пассажиропотоков в транспортной системе (Оценка вариантов развития и анализ чувствительности модели) / П. У. Бонсалл, А. Ф. Чемперноун, А. К. Мейсон, А. Г. Уилсон ; пер. с англ. - Москва : Транспорт, 1982. - 207 с. - Текст : непосредственный.
5. Van Vliet D. D'Esopo: a forgotten tree-building algorithm // Traffic Engineering & Control, July/August 1977. - P. 372-373.
6. Методы расчета потоков пассажиров и транспорта в городах : (Обзор). - Москва : Центр научно-технической информации по гражданскому строительству и архитектуре, 1968. - 92 с. - Текст : непосредственный.
7. Самойлов, Д. С. Научные основы организации пассажирского транспорта в городах : специальность: 05.00.00 «Технические науки» : диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Самойлов Дмитрий Сергеевич. - Москва, 1972. - 321 с. - Текст : непосредственный.
8. Traffic Assignment Manual. Washington, 1964.
9. Highway Capacity Manual 2000. Transportation Research Board of the National Academies, Washington, D.C., 2000.
10. Швецов, В. И. Математическое моделирование транспортных потоков / В. И. Швецов. - Текст : непосредственный // Автоматика и телемеханика. - 2003. - № 11. - С. 3-46.
11. Попов, А. А. Формирование и распределение пассажирских потоков на транспортной сети города: специальность 18.00.04 «Градостроительство, планировка сельскохозяйственных населённых пунктов» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Попов Алексей Александрович ; МГСУ. - Москва : МГСУ, 2005. - 220 с.
12. Попов А. А. Моделирование пиковых периодов транспортного обслуживания массовых мероприятий / А. А. Попов. - Текст : непосредственный // Проблемы функционирования систем транспорта: материалы Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных (с международным участием). - Тюмень, 2014. - С. 202-205.
13. Baoming Han, Weiteng Zhou, Dewei Li, Haodong Yin Dynamic Schedule-Based Assignment Model for Urban Rail Transit Network with Capacity Constraints // The Scientific World Journal, 2015, Article ID 940815. - URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/940815> (дата обращения: 2023-06-16).
14. Duong Viet Thong, Aviv Gibali, Mathias Staudigl, Phan Tu Vuong Computing Dynamic User Equilibrium on Large-Scale Networks Without Knowing Global Parameters // Networks and Spatial Economics (2021) 21: 735-768.
15. Ortúzar J. D., Willumsen L. G. Modelling transport. JohnWiley & Sons, 2011.
16. Nesterov Y., de Palma A. Stationary Dynamic Solutions in Congested Transportation Networks: Summary and Perspectives // Networks Spatial Econ. 2003. № 3(3). - P. 371-395.

«АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАССАЖИРОПОТОКОВ ПО ВРЕМЕНИ
И ПО МАРШРУТАМ ОБЩЕСТВЕННОГО ТРАНСПОРТА С УЧЕТОМ РАСПИСАНИЙ
ДВИЖЕНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЙ ПРОВОЗНОЙ СПОСОБНОСТИ»

17. Nielsen O. A. A Large Scale Stochastic Multi-Class Schedule-Based Transit Model with Random Coefficients, 2004. - URL: <https://www.researchgate.net/publication/291093769> (дата обращения: 2023-06-16).
18. Nielsen O. A., Frederiksen R. D. Large-scale schedule-based transit assignment — further optimization of the solution algorithms. - URL: <https://www.researchgate.net/publication/226012311> (дата обращения: 2023-06-20).
19. Filippi F., Gentile G., Meschini L. et al. Schedule-based transit assignment: New dynamic equilibrium model with vehicle capacity constraints. 2009. - URL: <https://www.researchgate.net/publication/226735875> (дата обращения: 2023-06-20).
20. Zhu W. A dynamic simulation model of passenger flow distribution on schedule-based rail transit networks with train delays // Journal of Traffic and Transportation Engineering, July 2016, DOI: 10.1016/j.jtte.2015.09.009.
21. Hamdouch Y., Lawphongpanich S. Schedule-Based Transit Assignment Model with Travel Strategies and Capacity Constraints // The Sixth Triennial Symposium on Transportation Analysis, 2008.
22. Hong L., Li W., Zhu W. Assigning Passenger Flows on a Metro Network Based on Automatic Fare Collection Data and Timetable // Discrete Dynamics in Nature and Society, May 2017. - URL: <https://doi.org/10.1155/2017/4373871> (дата обращения: 2023-06-26).
23. Nguen S., Pallottino S., Malucelli F. A Modeling Framework for Passenger Assignment on a Transport Network with Timetables // Transportation Science, August 2001, 35(3):238-249. DOI:10.1287/trsc.35.3.238.10152.
24. Поезда на связи «Мегафон» будет изучать предпочтения пассажиров для РЖД: [сайт]. - URL: <https://www.rbc.ru/newspaper/2015/07/02/56bcc0259a7947299f72be5b> (дата обращения: 2023-06-25).
25. Liu Qi, Chow Joseph Y.J. A congested schedule-based dynamic transit passenger flow estimator using stop count data. - URL: https://www.researchgate.net/publication/353344667_A_congested_schedule-based_dynamic_transit_passenger_flow_estimator_using_stop_count_data (дата обращения: 2023-06-24).
26. Dynamic Traffic Assignment: Transportation Research Circular E-C153, June 2011. Transportation Research Board of the National Academies, Washington, DC, 2011.