

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛЕЖКИ С УЧЕТОМ НЕРОВНОСТИ ПУТИ



Е.П. Корольков



А.И. Бондаренко

Приводится вывод математической модели поперечных колебаний тележки, в которой учтены неровности пути определенного вида, возвращающие силы, обусловленные криволинейностью профиля поверхности катания колес и уточнением формулы вычисления поперечного крипа.

Ключевые слова: тележка, неровности пути, модель, силы, крип, колебания, уравнения, устойчивость

Поставим задачу откорректировать математическую модель двухосной тележки с жесткой рамой, колесные пары (КП) которой имеют колеса с криволинейной поверхностью катания и возмущением, вызванным геометрическими неровностями рельсов. В качестве неровности применим модель, разработанную профессором Е.П. Корольковым. В предложенной модели каждый из рельсов имеет недопустимые отклонения от нормативного состояния, но в совокупности замеры путеизмерительной машиной показывают, что движение поездов возможно без каких-либо ограничений. В предложенной модели каждый рельс описывается синусоидальной неровностью, но сдвинутой по фазе, такой, что все отступления, контролируемые путеизмерительной машиной, не превышают величин отступлений 2 степени [1;2]. Также предполагается одинаковость уровней нитей и скорость движения пассажирских поездов 101–140 и товарных — 81–90 км/ч.

Рассмотрим модель поперечных колебаний тележки с учетом неровностей рельсовых нитей, указанных выше.

Для описания поперечных колебаний тележки применим принцип Даламбера.

Начало подвижной системы координат, движущейся со скоростью тележки, расположим на оси пути: ось Ox совместим с осью пути, а ось Oy — ей перпендикулярно. Будем считать, что тележка движется по прямому участку пути с постоянной скоростью V и рассматривать ее движение в подвижной системе координат (рис. 1, 2) как тела с двумя степенями свободы [3]: перемещение поперек пути y и вращение относительно вертикальной оси ψ , проходящей через центр масс тележки. Будем также считать давление P каждого колеса на рельсы постоянным и одинаковым для всех колес при любых перемещениях тележки.

Проведем вывод дифференциальных уравнений, описывающих поперечные колебания тележки с жест-

Корольков Евгений Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая и вычислительная математика» Академии базовой подготовки Российского университета транспорта (РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: динамика подвижного состава железнодорожного транспорта, математическое моделирование динамических систем. Автор более 90 научных работ. Имеет один патент на изобретение.

Бондаренко Анатолий Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» Института пути, строительства и сооружений Российского университета транспорта (ИПСС РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: уменьшение износа гребней колес железнодорожного транспорта и метрополитена. Автор 31 научной работы.

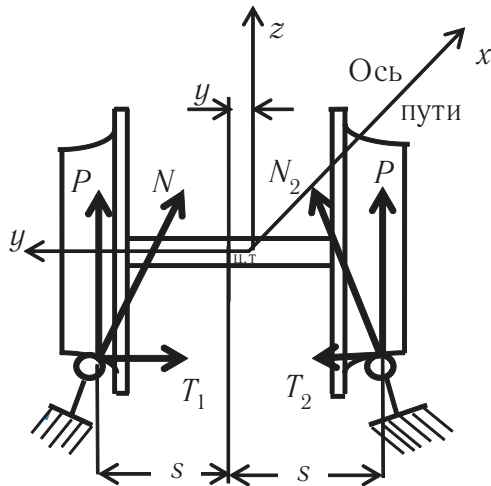


Рис. 1

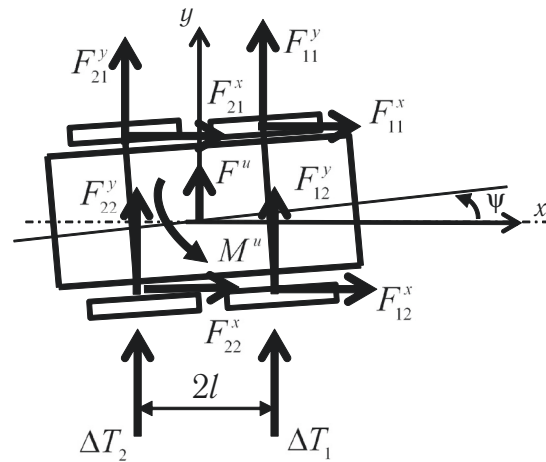


Рис. 2

кой рамой, с колесами прямолинейного и криволинейного профилей, учитывая уширение рельсовых нитей на постоянную величину 2Δ . Радиус качения колес в центральной установке КП также уменьшится на соответствующую величину, которую необходимо учесть при численных расчетах.

Заметим, что геометрическая неровность рельсовых нитей прежде всего влияет на радиусы качения колес r_{ij} , где i – номер КП: 1 – передняя, 2 – задняя колесные пары; j – номер колеса КП: 1 – левая по ходу движения, 2 – правая. Она (неровность) существенно влияет и на величину возвращающей силы в большей степени при криволинейном профиле поверхности катания колес.

Если вести обозначения y_{pij} величины отступления от номинального расположения рельсовой нити для абсциссы каждого колеса в данный момент времени, то ординаты контакта колес y_{kij} примут вид:

$$y_{kij} = (-1)^{j+1} [y + (-1)^{i+1} l \psi] - y_{pij}, \quad (1)$$

$$\text{где } \begin{cases} y_{pi1} = s_+ - 0,760 = \Delta + A \sin \frac{\pi x_{ij}}{L}; \\ y_{pi2} = s_- + 0,760 = -[\Delta + A \sin(\frac{\pi x_{ij}}{L} + \varphi)]. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x_{ij} – абсцисса точки контакта.

Примем уравнение профиля катания в виде [6]: $\Delta r = -i\xi - \beta\xi^2$, где ось $O_1\xi$ направлена к оси пути, ей перпендикулярна и лежит в горизонтальной плоскости; ось $O_1\Delta r$ перпендикулярна оси $O_1\xi$ и направлена вверх, начало координат O_1 совмещено с точкой контакта колеса с рельсом в центральной установке колесной пары; i – тангенс угла наклона касательной к параболе

в начале координат; β – некоторый параметр, величину 2β которого можно считать кривизной параболы в начале координат, так как при вычислении кривизны, производной i в начале координат и в ее окрестности можно пренебречь.

Используя результаты работы [7], получим выражения для определения приращений радиусов кругов катания для каждого из колес тележки при ее поперечном перемещении и повороте:

$$\Delta r_{ij} = i \frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} y_{kij} + \beta \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} y_{kij} \right)^2. \quad (3)$$

Учитывая формулу (1), можно получить выражения для радиусов качения каждого колеса:

$$r_{ij} = r_0 + \Delta r_{ij}, \quad (4)$$

$$r_0 = r_n - i \frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} \Delta - \beta \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} \Delta \right)^2,$$

где r_n – номинальный радиус колеса в центральной установке колесной пары.

Получим теперь формулы вычисления гравитационных составляющих T_{ij} нормальных реакций N_{ij} рельсов на колеса в точках контакта для колес с криволинейным профилем поверхности катания. Известно [3–5], что

$$T_{ij} = N_{ij} \operatorname{tg} \alpha_{ij},$$

где α_{ij} – угол наклона касательной к профилю катания колеса в точке его контакта с рельсом. Учитывая геометрический смысл производной, найдем выражение для T_{ij} в зависимости от ординаты точки контакта колеса с рельсом. Воспользовавшись формулами работы [7], получим для рассматриваемого профиля:

$$T_{ij} = P(-i - 2\beta\xi) = P(-i - \frac{2\beta}{1-\mu}y_{kij}). \quad (5)$$

Найдем выражение для возвращающей силы каждой КП тележки как разность гравитационных составляющих колес КП: $\Delta T_1 = T_{11} - T_{12}$ и $\Delta T_2 = T_{21} - T_{22}$, учитывая формулы (1;2;5)

$$\begin{cases} \Delta T_1 = P \frac{2\beta}{1-\mu} (y_{k11} - y_{k12}) = P \frac{2\beta}{1-\mu} (2y + l\psi - y_{p11} + y_{p12}); \\ \Delta T_2 = P \frac{2\beta}{1-\mu} (y_{k21} - y_{k22}) = P \frac{2\beta}{1-\mu} (2y - l\psi - y_{p21} + y_{p22}). \end{cases} \quad (6)$$

Для подсчета крива в контакте каждого колеса воспользуемся формулами, предложенными в работе [8], применительно к тележке, движущейся по рельсовым неровностям:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1j}^x = r_{1j}\Delta\varphi - (\Delta x - \frac{\psi^2}{2}l + (-1)^j\psi s); \\ \varepsilon_{2j}^x = r_{2j}\Delta\varphi - (\Delta x + \frac{\psi^2}{2}l + (-1)^j\psi s); \quad j = 1, 2 \\ \varepsilon_{1j}^y = \Delta y + (-1)^j \Delta y_{p1j} - r_{1j}\Delta\varphi \cdot \psi; \\ \varepsilon_{2j}^y = \Delta y + (-1)^j \Delta y_{p2j} - r_{2j}\Delta\varphi \cdot \psi. \end{cases} \quad (7)$$

Найдя интенсивность изменения составляющих крива:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{1j}^x = r_{1j}\dot{\varphi} - (\dot{x} - \psi\dot{\psi}l + (-1)^j\dot{\psi}s); \\ \dot{\varepsilon}_{2j}^x = r_{2j}\dot{\varphi} - (\dot{x} + \psi\dot{\psi}l + (-1)^j\dot{\psi}s); \\ \dot{\varepsilon}_{1j}^y = \dot{y} + (-1)^j \dot{y}_{p1j} - r_{1j}\dot{\varphi}\psi; \\ \dot{\varepsilon}_{2j}^y = \dot{y} + (-1)^j \dot{y}_{p2j} - r_{2j}\dot{\varphi}\psi; \\ r_{ij} = r_0 + \Delta r_{ij}. \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (8)$$

Подставим их в выражения сил крива $F = -k \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{x}}$ раскладывая их на составляющие. Здесь F — сила крива; k — коэффициент крива; $\dot{\varepsilon}$ — интенсивность изменения крива; $\dot{x}$ — поступательная скорость тела.

$$\begin{cases} F_{1j}^x = -\frac{k}{\dot{x}}(r_{1j}\dot{\varphi} - (\dot{x} - \psi\dot{\psi}l + (-1)^j\dot{\psi}s)); \\ F_{2j}^x = -\frac{k}{\dot{x}}(r_{2j}\dot{\varphi} - (\dot{x} + \psi\dot{\psi}l + (-1)^j\dot{\psi}s)); \\ F_{1j}^y = -\frac{k}{\dot{x}}(\dot{y} + (-1)^j \dot{y}_{p1j} - r_{1j}\dot{\varphi}\psi); \\ F_{2j}^y = -\frac{k}{\dot{x}}(\dot{y} + (-1)^j \dot{y}_{p2j} - r_{2j}\dot{\varphi}\psi). \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (9)$$

$$\begin{cases} F_{1j}^x = -\frac{k}{\dot{x}}[(r_0 + \Delta r_{1j})\dot{\varphi} - (\dot{x} - \psi\dot{\psi}l + (-1)^j\dot{\psi}s)]; \\ F_{2j}^x = -\frac{k}{\dot{x}}(r_0 + \Delta r_{2j})\dot{\varphi} - (\dot{x} + \psi\dot{\psi}l + (-1)^j\dot{\psi}s); \\ F_{1j}^y = -\frac{k}{\dot{x}}(\dot{y} + (-1)^j \dot{y}_{p1j} - (r_0 + \Delta r_{1j})\dot{\varphi}\psi); \\ F_{2j}^y = -\frac{k}{\dot{x}}(\dot{y} + (-1)^j \dot{y}_{p2j} - (r_0 + \Delta r_{2j})\dot{\varphi}\psi). \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (10)$$

Составим уравнение состояния тележки с жесткой рамой

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 F_{ij}^y + \sum_{i=1}^2 \Delta T_i + F_u = 0; \\ s \sum_{j=1}^2 (-1)^j (F_{1j}^x + F_{2j}^x) + l \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (F_{i1}^y + F_{i2}^y + \Delta T_i) + M_u = 0 \end{cases} \quad (11)$$

в некоторый момент времени (см. рис. 1,2).

Здесь $F_u = -m_T \ddot{y}$, $M_u = -J_z \ddot{\psi}$, $F_{ij} = -k \frac{\dot{u}}{v}$, $\dot{u}$ – скорость упругой деформации в пятне контакта каждого колеса

тележки и рельсов. Преобразовывая уравнения (9) после подстановки выражений силовых факторов, следует учитывать связь угловой скорости вращения колесных пар с поступательной скоростью тележки в данный момент времени $\dot{x} = r_0 \cdot \dot{\phi}$. Подставим выражения силовых факторов в уравнения (11), учитывая $r_{ij} = r_0 + \Delta r_{ij}$ и после соответствующих преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{y} + \frac{4k}{m_T \dot{x}} \dot{y} - 4 \frac{k}{m_T \dot{x}} \dot{\phi} \psi r_0 - \frac{k}{m_T \dot{x}} (\Delta r_{11} + \Delta r_{12} + \Delta r_{21} + \Delta r_{22}) \dot{\phi} \psi + \frac{P}{m_T} \frac{8\beta y}{1-\mu} = \\ & = - \frac{k}{m_T \dot{x}} (-\dot{y}_{p11} - \dot{y}_{p21} + \dot{y}_{p12} + \dot{y}_{p22}) - \frac{P}{m_T} \frac{2\beta}{1-\mu} (-y_{p21} + y_{p22} - y_{p11} + y_{p12}); \\ & \ddot{\psi} + \frac{4ks^2}{J_z \dot{x}} \dot{\psi} + \frac{4\beta l^2 P}{J_z (1-\mu)} \psi + \frac{4ks}{J_z \dot{x}} i \frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} y = \\ & = \frac{ks}{J_z \dot{x}} \cdot i \frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} (y_{p11} - y_{p12} + y_{p21} - y_{p22}) + \\ & + \frac{2\beta l}{1-\mu} \cdot \frac{P}{J_z} (y_{p11} + y_{p22} - y_{p12} - y_{p21}) + \\ & + l \frac{k}{J_z \dot{x}} \cdot i \frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta} (y_{p11} + y_{p12} - y_{p21} - y_{p22}) - l \frac{k}{J_z \dot{x}} (\dot{y}_{p11} - \dot{y}_{p12} + \dot{y}_{p22} - \dot{y}_{p21}). \end{aligned} \quad (12)$$

Следует отметить, что в правой части уравнений (12) стоят суммы простых гармоник, наложение которых друг на друга возбуждают сложное периодическое колебание как самой тележки, так и кузова вагона, что может существенно повлиять на безопасность движения экипажа.

В тоже время, сравнивая левые части уравнений (12) с уравнениями, приведенными в работе [3]

$$\begin{cases} m_T \ddot{y} + \frac{4k}{v} \dot{y} - 4k\psi = 0; \\ J_{Tz} \ddot{\psi} + \frac{4kl_m^2}{v} \dot{\psi} + \frac{4k s i}{r} y = 0, \end{cases}$$

можно заметить наличие соответствующих линейных членов искомых функций в уравнениях (12). Наличие этих членов дает основание полагать об устойчивости и даже затухании собственных колебаний тележки. 

Литература

1. Правила технической эксплуатации железных дорог Российской Федерации (Утверждены приказом Минтранса от 21 декабря 2010 г. № 286) (Зарегистрировано в Минюсте России 28.01.2011 № 19627).
2. Инструкция по текущему содержанию пути, утвержденная распоряжением ОАО «РЖД» №2288р от 14.11.2016.

3. Вершинский, С.В. Динамика вагона: учебник для вузов ж.-д. трансп. / С.В. Вершинский, В.Н. Данилов, В.Д. Хусидов; под ред. С.В. Вершинского. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Транспорт, 1991. — 360 с.
4. Гарг, В.К. Динамика подвижного состава / В.К. Гарг, Р.В. Дуккипати; Пер. с англ. К.Г. Бомштейна; Под ред. Н.А. Панькина. — М.: Транспорт, 1988. — 391 с.
5. Корольков, Е.П. Формула вычисления возвращающей силы колесной пары для колес с криволинейным профилем / Е.П. Корольков, А.А. Иванова // Мир транспорта. — 2017. — №4. — С. 42–48.
6. Корольков, Е.П. Выбор профиля поверхности катания из условия вписывания в кривые / Е.П. Корольков, К.А. Сергеев, А.И. Бондаренко // Наука и техника транспорта. — 2016. — №2. — С. 49–51.
7. Корольков, Е.П. Свойства точек контакта криволинейного профиля / Е.П. Корольков // Наука и техника транспорта. — 2016. — №1. — С. 76–78.
8. Корольков, Е.П. К вопросу моделирования движения колесной пары / Е.П. Корольков, А.В. Ряднов, Т.А. Фролова // Наука и техника транспорта. — 2019. — №4. — С. 31–34.