

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ СРЕДЫ, ВЫЗВАННЫХ ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ



В.Н. Алексеев

Рассмотрено плоскополяризованное волновое движение упругой среды. Получены выражения для скалярного и векторного потенциалов такого движения, что позволяет определять компоненты смещений и напряжений, возникающих в средах.

Ключевые слова: изотропно-упругая среда, продольные и поперечные волны, скалярный и векторный потенциалы, плоскополяризованное движение, функции Бесселя и Ханкеля

DOI: 10.53883/20749325_2021_03_64

Строительство сооружений железнодорожной инфраструктуры в ряде случаев может потребовать проведения буровзрывных работ с использованием удлиненных зарядов, устанавливаемых в полостях (шпурах, скважинах), заранее подготовленных в разрабатываемой среде (твердые и скальные породы, мерзлые грунты и т.п.). При этом необходим расчет напряжений и смещений, возникающих вследствие волновых процессов, генерируемых в среде действием взрывных нагрузок. Такой расчет основывается на анализе решений соответствующих волновых задач. Рассмотрим одну из задач такого типа, имеющую несомненную актуальность.

Исследуем процесс распространения волн в однородной сплошной изотропно-упругой безграничной среде, вызванный действием нагрузки, равномерно распределенной вдоль бесконечно прямой и ориентированной ортогонально этой прямой. Требуется определить волновое движение среды.

Для решения поставленной задачи применим метод, используемый, в частности, в математической теории

упругости [1], сейсмологии и сейсморазведке [2] и состоящий в следующем.

Рассмотрим бесконечно длинную круглую цилиндрическую скважину малого радиуса r_0 , в которую помещена («впаяна») тонкостенная упругая металлическая труба, на внутреннюю поверхность которой действует заданная нагрузка, что приводит к возникновению в окружающей скважину среде волнового поля. Естественным образом принять, что выполняя предельный переход, устремляя к нулю радиус скважины (и, следовательно, трубы), получаем решение поставленной задачи о действии в сплошной безграничной среде сосредоточенной нагрузки, равномерно распределенной вдоль бесконечной прямой.

Будем описывать волновое движение среды с помощью потенциалов смещения — продольного $\Phi(x, y, z, t)$ и поперечного $\Psi(x, y, z, t)$ [3].

Согласно основной теореме векторного анализа [4], векторное поле смещений $\vec{u}(x, y, z, t)$ точек среды, вызванное действием рассматриваемой нагрузки, заданное во всем пространстве и исчезающее на бес-

конечности вместе с дивергенцией и вихрем, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального $u_1(x, y, z, t) = q \operatorname{grad} \varphi$ и соленоидального $u_2(x, y, z, t) = \operatorname{rot} \bar{\psi}$ полей:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = q \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \bar{\psi}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{u}_1 = \operatorname{rot} q \operatorname{grad} \varphi = 0; \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{\psi} = 0.$$

Движение среды может быть описано двумя волновыми уравнениями, которым подчинены потенциалы:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \bar{\psi} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Уравнением (2) описывается распространение в среде продольных волн, уравнением (3) — поперечных;

$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{\text{ср}}}$, $b^2 = \frac{\mu}{\rho_{\text{ср}}}$ — квадраты скоростей указанных волн соответственно; λ и μ — коэффициенты Ламе; $\rho_{\text{ср}}$ — плотность среды.

Задача заключается в отыскании значений скаляр-

ного $\varphi(x, y, z, t)$ и векторного $\bar{\psi}(x, y, z, t)$ потенциалов, удовлетворяющих соответствующим условиям (1).

Будем рассматривать плоскопараллельное волновое движение, при котором поле смещений точек среды ориентировано ортогонально продольной оси цилиндрической скважины.

Введем прямоугольную систему координат, направление оси x которой совместим с направлением действующей силы, а ось y — с продольной осью скважины. Тогда для компонент вектора смещений $\vec{u}(u, v, w)$ точек среды будем иметь $u = u(x, z)$, $v = 0$, $w = w(x, z)$; для компонент векторного потенциала $\bar{\psi}_x = \psi_x = 0$ и $\bar{\psi}_y = \psi_y = \psi(x, z, t)$, а векторное уравнение (3) сводится к единственному скалярному уравнению относительно единственной отличной от нуля компоненты $\bar{\psi}_y(x, z, t)$ векторного потенциала $\bar{\psi}(\psi_x, \psi_y, \psi_z) = \bar{\psi}(0, \psi, 0)$, обозначение которой везде далее будем записывать без нижнего символа. Рассматриваемое волновое движение будет описываться двумя скалярными уравнениями относительно функций $\varphi(x, z, t)$ и $\psi(x, z, t)$; эти уравнения аналогичны по своей форме:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Компоненты вектора смещения $\vec{u}(u, v, w)$ будут выражаться через потенциалы формулами:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = 0; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

Переходя к цилиндрическим координатам r, α, y , определяемым равенствами $x = r \cdot \cos \alpha$, $y = y$, $z = r \cdot \sin \alpha$, $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $-\infty < y < +\infty$ и выражая в этих координатах оператор Лапласа, получаем в силу (4) и (5) два уравнения относительно значений искомых потенциалов $\varphi(r, \alpha, t)$ и $\psi(r, \alpha, t)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Как известно [3], все волновые уравнения, полученные для поля смещений в условиях осевой симметрии, имеют одинаковый вид.

В цилиндрических координатах зависимости между потенциалами, компонентами смещений и напряжений определяются формулами:

$$u_r(r, \alpha) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad (9)$$

$$u_\alpha(r, \alpha) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (10)$$

$$\sigma_{rr}(r, \alpha) = \lambda \theta + 2\mu \cdot e_{rr} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \theta = \operatorname{div} \vec{u}, \quad (11)$$

$$\sigma_{r\alpha}(r, \alpha) = \mu \cdot e_{r\alpha} = \mu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right). \quad (12)$$

Примем, что действующая нагрузка задана функцией

$$P(t) = P_0 \cdot e_{i\omega t}. \quad (13)$$

Для решения рассматриваемой задачи необходимо найти решения $\varphi(r, \alpha, t)$ и $\psi(r, \alpha, t)$ уравнений (7) и (8) при следующих условиях.

В силу отсутствия составляющей смещений цилиндра, «впаянного» в скважину, вдоль оси y :

$$(u_r \cdot \sin \alpha + u_\alpha \cdot \cos \alpha) \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (14)$$

Из условия равновесия между усилиями, действующими со стороны среды на цилиндр и нагрузкой, приложенной к цилиндру, заданной по величине и направлению

$$\int_0^{2\pi} \left[\sigma(r_0, \alpha, t) \cdot \cos \alpha - \sigma_{r\alpha}(r_0, \alpha, t) \cdot \sin \alpha \right] \cdot r_0 \cdot d\alpha + P_0 \cdot e^{i\omega t} = 0, \quad (15)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\sigma(r_0, \alpha, t) \cdot \sin \alpha + \sigma_{r\alpha}(r_0, \alpha, t) \cdot \cos \alpha \right] \cdot d\alpha = 0. \quad (16)$$

Найдем теперь решение уравнения (7). Полагая

$$\varphi(r, \alpha, t) = R(r) \cdot V(\alpha) \cdot \tau(t) \quad (17)$$

в силу (7) будем иметь:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{V''}{V} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\tau''}{\tau} = -\frac{\omega^2}{a^2}, \quad (18)$$

где ω^2 — произвольная постоянная. Из этого соотношения для определения функции $\tau(t)$ получаем:

$$\tau'' + \omega^2 \tau = 0$$

и следовательно,

$$\tau(t) = c_1 \cdot e^{i\omega t} + c_2 \cdot e^{-i\omega t}, \quad (19)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Теперь согласно (18) имеем:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\omega^2}{a^2} r^2 = -\frac{V''}{V} = n^2, \quad (20)$$

где n^2 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$V'' + n^2 V = 0$$

и таким образом

$$V(\alpha) = B_1 \cdot \cos n\alpha + B_2 \cdot \sin n\alpha. \quad (21)$$

Вследствие того, что искомое поле должно быть однозначным и периодическим с периодом 2π : $V(\alpha + 2\pi) = V(\alpha)$, значение n в (21) может быть только целым ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Согласно (20) радиальная функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$R'' \frac{1}{r} R' + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Заменой

$$\rho = \frac{\omega r}{a} \quad (22)$$

это уравнение сводится к уравнению Бесселя n -го порядка

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad (23)$$

общее решение которого имеет вид:

$$R(\rho) = A_1 \cdot J_n(\rho) + A_2 \cdot N_n(\rho), \quad (24)$$

где $J_n(\rho)$ и $N_n(\rho)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно; A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

В решении (24) перейдем от функций Бесселя к функциям Ханкеля, определяемым через функции Бесселя первого и второго рода формулами:

$$H_n^{(1)}(\rho) = J_n(\rho) + i \cdot N_n(\rho), \quad H_n^{(2)}(\rho) = J_n(\rho) - i \cdot N_n(\rho),$$

что позволит проще проанализировать полученное решение. Очевидно, что функции Ханкеля как линейные

комбинации двух решений уравнения Бесселя также являются его решениями, причем линейно независимыми, поскольку вронскиан этих функций отличен от нуля [5, с.120]:

$$\Delta[H_n^{(1)}(\rho), H_n^{(2)}(\rho)] = -\frac{4i}{\pi\rho}.$$

Таким образом, для значения радиальной функции $R(\rho)$ будем иметь:

$$R(\rho) = A_n H_n^{(2)}(\rho) + B_n H_n^{(1)}(\rho), \quad (25)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Искомое поле смещений точек среды должно иметь характер волны, распространяющейся в бесконечность по радиальным направлениям. Из анализа асимптотических выражений для функций Ханкеля [5, с.144]

$$H_n^{(1)}(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cdot e^{i\left(\rho - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad H_n^{(2)}(\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cdot e^{-i\left(\rho - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

при больших значениях аргумента ($\rho \gg 1$) следует, что слагаемое $A_n H_n^{(2)}(\rho)$ в сочетании с временным множителем $e^{i\omega t}$ образует требуемую волну, то есть при $\rho \rightarrow \infty$ соответствует волне, распространяющейся от источника возмущений (в рассматриваемом случае от цилиндрической скважины) на бесконечность, а слагаемое $B_n H_n^{(1)}(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ определяет волну, движущуюся в противоположном направлении (из бесконечности к источнику), и может быть использована для представления волны, приходящей из бесконечности. Таким образом, в (25) следует положить $B_n = 0$ и принять

$$R(r) = A_n \cdot H_n^{(1)}\left(\frac{\omega r}{a}\right). \quad (26)$$

Согласно (17), (19), (21) и (26) одно из возможных частных решений уравнения (7) имеет вид:

$$\varphi_n(r, \alpha, t) = A_n H_n^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) (B_1 \cos n\alpha + B_2 \sin n\alpha) (c_1 \cdot e^{i\omega t} + c_2 \cdot e^{-i\omega t}), \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

Общее однозначное и ограниченное решение уравнения (7), удовлетворяющее принципу излучения на бесконечности, представляет собой сумму всех частных решений типа (27) при $n=0, 1, 2, \dots$:

$$\varphi(r, \alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r, \alpha, t). \quad (28)$$

Решение уравнения (8) для значения потенциала $\psi(r, \alpha, t)$ имеет аналогичное выражение с заменой константы a (скорость продольной волны) на константу b (скорость поперечной волны).

Поставим теперь задачу удовлетворить дополнительным условиям (14), (15) и (16), полагая в (27) $n=1$. Рассмотрим частные значения для скалярного и векторного потенциалов соответственно в виде:

$$\varphi(r, \alpha, t) = A H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cos \alpha \cdot e^{i\omega t}, \quad (29)$$

$$\psi(r, \alpha, t) = B H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right) \sin \alpha \cdot e^{i\omega t}, \quad (30)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Вычислим согласно (9) и (10) компоненты смещений u_r и u_α . Учитывая, что [6, с.24]

$$\frac{d}{d\rho} H_1^{(2)}(\rho) = H_0^{(2)}(\rho) - \frac{1}{\rho} H_1^{(2)}(\rho), \quad \rho = \frac{\omega r}{\alpha},$$

и опуская везде далее временный сомножитель $e^{i\omega t}$, получаем:

$$u_r = \left\{ A \left[\frac{\omega}{a} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) - \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{r} \right] + B \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right)}{r} \right\} \cos \alpha, \quad (31)$$

$$u_{\alpha} = - \left\{ A \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{r} + B \left[\frac{\omega}{b} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right) - \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right)}{r} \right] \right\} \sin \alpha. \quad (32)$$

Вычислим далее согласно (11) и (12) компоненты напряжений σ_{rr} и $\sigma_{r\alpha}$.

Для значения θ в силу (1), (2) и с учетом известных соотношений векторного анализа находим:

$$\theta = \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

и в силу (29) окончательно получаем:

$$\theta = -A \frac{\omega^2}{a^2} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cos \alpha.$$

Вычислим производную $\frac{\partial u_r}{\partial r}$. Учитывая, что [6, с.24]

$$\frac{d}{d\rho} H_0^{(2)}(\rho) = -H_1^{(2)}(\rho),$$

согласно (31) имеем:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = - \left\{ A \left[\frac{\omega^2}{a^2} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) + \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{r} \right] - B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right)}{r} \right\} \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -A \lambda \frac{\omega^2}{a^2} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cos \alpha - \\ &- 2\mu \left\{ A \left[\frac{\omega^2}{a^2} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) + \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{r} \right] - B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right)}{r} \right\} \cos \alpha = \\ &= - \left\{ A \omega^2 \rho_{cp} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) + 2\mu \left[A \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{r} - B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right)}{r} \right] \right\} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (33)$$

Для вычисления значения напряжения $\sigma_{r\alpha}$, определенного согласно (12), предварительно заметим, что в

случае рассматриваемого плоскополяризованного движения, $\operatorname{rot} \vec{u}$ имеет единственную составленную по оси Z [3, с.109]

$$\operatorname{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r} + \frac{u_{\alpha}}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

С учетом указанного равенства выражение (12) для значения $\sigma_{r\alpha}$ представим в виде

$$\sigma_{r\alpha} = \mu \left(2 \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r} - \operatorname{rot}_z \vec{u} \right). \quad (34)$$

В силу (1) и согласно известным соотношениям векторного анализа

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\psi}.$$

С учетом условия соленоидальности $\text{div} \vec{\Psi} = 0$ поля $\vec{\Psi}$

$$\text{rot rot} \vec{\Psi} = \text{grad div} \vec{\Psi} - \Delta \vec{\Psi} = -\Delta \vec{\Psi}.$$

Окончательно согласно (3) и (30) находим

$$\text{rot}_z \vec{u} = -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = B \frac{\omega^2}{a^2} H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right) \sin \alpha \quad (35)$$

(по-прежнему множитель $e^{i\omega t}$ опущен).

Для значения производной $\frac{\partial u_\alpha}{\partial r}$ согласно (32) имеем:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} = \left[B \frac{\omega^2}{b^2} H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right) - A \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{a} \right)}{r} + B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right)}{r} \right] \sin \alpha. \quad (36)$$

В силу (34), (35), (36) для значения $\sigma_{r\alpha}$ получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\alpha} &= \left\{ 2\mu \left[B \frac{\omega^2}{b^2} H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right) - A \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{a} \right)}{r} + B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right)}{r} \right] - \mu B \frac{\omega^2}{b^2} H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right) \right\} \sin \alpha = \\ &= \left\{ B \omega^2 \rho_{cp} H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right) - 2\mu \left[A \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{a} \right)}{r} - B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right)}{r} \right] \right\} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (37)$$

Имея выражения для компонент смещений u_r , u_α и напряжений σ_r , $\sigma_{r\alpha}$, можем обратиться к определению значений постоянных A и B в выражениях для скалярного и векторного потенциалов (29) и (30).

Согласно (14) и с учетом (31), (32) имеем:

$$A \frac{\omega}{a} H_0^{(2)} \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) - B \frac{\omega}{b} H_0^{(2)} \left(\frac{\omega r_0}{b} \right) - 2 \left[A \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r_0}{a} \right)}{r_0} - B \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r_0}{b} \right)}{r_0} \right] = 0.$$

Выполняя в этом выражении предельный переход при $r_0 \rightarrow 0$, удерживая главные члены разложений функций

Ханкеля в окрестности нуля [7, с. 180] $H_0^{(2)}(\rho) = -\frac{2i}{\pi} \cdot \ln \frac{\rho}{2} + \dots$, $H_1^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{\rho} + \dots$, получаем $-\frac{4i}{\pi \omega r_0^2} (Aa - Bb) + \dots = 0$,

где точками обозначены члены, имеющие порядок $\ln r_0$. Отсюда следует, что главным является член порядка r_0^{-2} , выписанный явно, который обязательно должен равняться нулю. Таким образом, первое уравнение для определения значений A и B имеет вид:

$$aA - bB = 0. \quad (38)$$

Условие (15) с учетом (33) и (37) сводится к виду

$$\begin{aligned} &AH_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{a} \right) \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha + BH_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha + \\ &+ 2\mu \left[A \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{a} \right)}{r} - B \frac{d}{dr} \cdot \frac{H_1^{(2)} \left(\frac{\omega r}{b} \right)}{r} \right] \int_0^{2\pi} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) d\alpha = \frac{P_0}{\omega \rho_{cp} r_0} \end{aligned}$$

$$\text{или окончательно } AH_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) + BH_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right) = \frac{P_0}{\pi\omega^2\rho_{\text{cp}}r_0}.$$

Используя разложение функции $H_1^{(2)}(\rho)$ в окрестности нуля и сохраняя в нем главные члены при $r_0 \rightarrow 0$, из последнего равенства получаем:

$$aA + bB = -\frac{iP_0}{2\omega\rho_{\text{cp}}}. \quad (39)$$

Из уравнений (38) и (39) находим:

$$A = -\frac{iP_0}{4a\omega\rho_{\text{cp}}}, B = -\frac{iP_0}{4b\omega\rho_{\text{cp}}}. \quad (40)$$

Условие (16) выполняется тождественно относительно найденных значений A и B в силу того, что

$$\int_0^{2\pi} \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$$

Согласно (29), (30) и (40) для искомых значений скалярного и векторного потенциалов окончательно получаем:

$$\varphi(r, \alpha, t) = -\frac{iP_0}{4a\omega\rho_{\text{cp}}} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cos\alpha \cdot e^{i\omega t}, \quad (41)$$

$$\psi(r, \alpha, t) = -\frac{iP_0}{4b\omega\rho_{\text{cp}}} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega r}{b}\right) \sin\alpha \cdot e^{i\omega t}, \quad (42)$$

где ρ_{cp} — плотность среды.

Формулы (41) и (42) совместно с (31) и (32) описывают поле смещений, возникающее в безграничной изотропно-упругой среде в результате действия сосредоточенной силы, равномерно распределенной вдоль прямой $r=0$ и меняющейся во времени по гармоническому закону. Напряжения, возникающие в среде, задаются формулами (33) и (37). 

Литература

1. Треффц, Е. Математическая теория упругости / Е. Треффц; Пер. под ред. А. И. Лурье. — Ленинград; —Москва: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1932 (Л.: тип. им. Бухарина). —148 с. —(Механика упругого тела; Вып. 1). —Текст: непосредственный.
2. Уайт, Д.Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн / Дж. Э. Уайт; Пер. с англ. О.В. Павловой, С.В. Гольдина; Ред. Н.Н. Пузырев. —Москва: Недра, 1986. —264 с. —Текст: непосредственный.
3. Саваренский, Е.Ф. Элементы сейсмологии и сейсмометрии: [Учеб. пособие для гос. ун-тов] / Е.Ф. Саваренский, Д.П. Киринос. —2-е изд., перераб. —Москва: Гостехиздат, 1955. —544 с. —Текст: непосредственный.
4. Борисенко, А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления: [Учеб. пособие для вузов] / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов. —6-е изд. —Харьков: Вища шк: Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. —215 с. —Текст: непосредственный.
5. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. —Москва: Высшая школа. —1965. —423 с. —Текст: непосредственный.
6. Коренев, Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б.Г. Коренев. —Москва: Наука. —1971. —287с. —(Физико-математическая б-ка инженера). —Текст: непосредственный.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / [М. Абрамовиц, Д. Липман, А. Мак Ниш и др.]; Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; Пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. —Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. —832 с. —Текст: непосредственный.