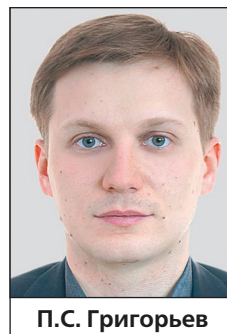


ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ КОТЛА ЦИСТЕРНЫ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

Статья посвящена разработке методики оценки устойчивости оболочки котла железнодорожной цистерны при действии наружного избыточного давления вследствие вакуума внутри котла. Методика основана на применении моментной теории оболочек, вариационного принципа Лагранжа, аппроксимации перемещений в виде двойных рядов Фурье, а также матричных операций.

Ключевые слова: железнодорожная цистерна, котел, оболочка вращения, потеря устойчивости, моментная теория оболочек, ряд Фурье

EDN: ANRELI



П.С. Григорьев



С.В. Беспалько

Устойчивость котлов представляет собой важную проблему при возможном действии сжимающих напряжений. Это относится и к котлам железнодорожных цистерн, у которых в эксплуатации могут иметь место подобные режимы [15;16]. Для криогенных цистерн, имеющих двойной котел с вакуумированием межкотлового пространства, наружное атмосферное давление становится возможной причиной потери устойчивости. Кроме того, в универсальных цистернах, вследствие перепадов температуры, при герметично закрытой горловине также может возникать вакуум внутри котла, приводящий к избыточному внешнему давлению.

Сама же потеря устойчивости представляет опасность тем, что приводит к радикальному изменению формы оболочки, делая котел неработоспособным. На рис. 1 показаны примеры последствий аварийных ситуаций, связанных с потерей устойчивости [1–3].

Потеря устойчивости представляет собой скачкообразный переход в альтернативное напряженно-деформированное состояние, которое при достижении сжимающими напряжениями некоторого критического значения, выше которого новое состояние становится энергетически более выгодным [17;20].

В статье рассматривается применение вариационного принципа Лагранжа, в котором учитывается

Григорьев Павел Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электропоезда и локомотивы» Института транспортной техники и систем управления Российского университета транспорта (ИТТСУ РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: механика деформируемого твердого тела, математическое моделирование, динамика и прочность подвижного состава. Автор 15 научных работ.

Беспалько Сергей Валерьевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Вагоны и вагонное хозяйство» Института транспортной техники и систем управления Российского университета транспорта (ИТТСУ РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: строительная механика вагонов, динамика вагона, вопросы безопасности перевозки опасных грузов. Автор 62 научных работ.

Коржин Сергей Николаевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Вагоны и вагонное хозяйство» Института транспортной техники и систем управления Российского университета транспорта (ИТТСУ РУТ (МИИТ)). Область научных интересов: технология ремонта ходовых частей нетягового подвижного состава железных дорог, повышение износоустойчивости и оптимизация профиля катания железнодорожных колес, динамика и прочность подвижного состава. Автор 15 научных работ.



Рис. 1. Последствия потери устойчивости котла цистерны

дополнительная потенциальная энергия в критическом состоянии. Эта энергия равна работе дополнительных изгибающих моментов на деформациях изменения кривизны вследствие появления неосесимметричного деформированного состояния.

Материалы и методы

Расчет базируется на следующих допущениях. Котел цистерны представляется в виде цилиндрической оболочки с днищами в виде абсолютно жестких в своей плоскости мембран. Пренебрегаем конструктивными нерегулярностями оболочки. Используется моментная теория оболочек [4]. Материал считается сплошным и однородным.

Принята цилиндрическая система координат $O\xi\beta\eta$, с началом O на срединной поверхности оболочки в концевом сечении цилиндра. $O\xi$ — продольная координата; $O\beta$ — угловая координата в окружном направлении; $O\eta$ — радиальная координата с положительными значениями снаружи оболочки. Перемещения по направлениям координатных осей обозначаются следующим образом: u — продольное; v — тангенциальное; w — радиальное.

Запишем геометрические (1) и физические (2) соотношения моментной теории оболочек в матричной форме:

$$\bar{\varepsilon} = [d] \cdot \bar{W}, \quad (1)$$

$$\bar{N} = [B] \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (2)$$

где $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \omega; x_1; x_2; \tau\}$ — вектор деформаций; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — деформации растяжения-сжатия вдоль осей $O\xi$ и $O\beta$ соответственно; ω — деформация сдвига; x_1, x_2 — деформации изменения кривизны в плоскостях $O\xi\eta$ и $O\beta\eta$ соответственно; τ — деформация кручения;

$\bar{W} = \{u; v; w\}$ — вектор перемещений;

$$[d]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial}{R \partial \beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{R \partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & -\frac{\partial^2}{R^2 \partial \beta^2} & -\frac{\partial^2}{R \partial \beta \partial \xi} \end{bmatrix} -$$

матрица-оператор;

$\bar{N} = \{N_1, N_2, 2S, M_1, M_2, 2H\}$ — вектор внутренних усилий; N_1, N_2 — усилия растяжения-сжатия в направлении $O\xi$ и $O\beta$ соответственно; S — сдвигающие усилия; M_1, M_2 — изгибающие моменты в плоскостях $O\xi\eta$ и $O\beta\eta$ соответственно; H — крутящие моменты; E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона;

$$[B] = \begin{bmatrix} B & B\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B\mu & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2B_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & D\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D\mu & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2D_c \end{bmatrix} - \text{матрица цилиндрических жесткостей};$$

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}; B_c = \frac{Eh}{2(1+\mu)}; D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; D_c = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}; h - \text{толщина.}$$

Сдвигающие усилия и крутящие моменты выступают попарно, что учитывается коэффициентом «2» в векторе усилий. Граничные условия и симметрия оболочки учитываются выбором соответствующих функций формы для перемещений.

Уравнения равновесия, дополняющие геометрические и физические соотношения, составляются на основе принципа Лагранжа [5–7]. Для этого определяются дополнительная потенциальная энергия (3) деформации оболочки (по сравнению с исходным осесимметричным состоянием) и работа внешних сил (4) при потере устойчивости.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \vec{\varepsilon}^T \vec{N} R d\beta d\xi, \quad (3)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} P_{cr} \vec{W}^T [E_w] \vec{N}^{*T} \vec{\varepsilon} R d\beta d\xi, \quad (4)$$

где l – длина цилиндрической части котла; P_{cr} – наружное избыточное давление; $\vec{N}^* = \left\{ 0; 0; 0; -\frac{R}{2}; R; 0 \right\}$ – вектор начальных усилий, вызванных единичным наружным избыточным давлением до потери устойчивости (то

есть при осесимметричной деформации); $[E_w] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – матрица преобразования, выделяющая из вектора

перемещений одно радиальное перемещение w (u и v обнуляются).

Введем аппроксимацию перемещений в виде двойных рядов Фурье. Выбор типа тригонометрической функции определяется характером изменения перемещения, в том числе условиями симметрии. Представим аппроксимацию в матричной форме:

$$\vec{W} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi] \cdot \vec{w}_{mn}, \quad (5)$$

$$\text{где } [\Phi] = \begin{bmatrix} \cos m\beta \cos \frac{n\pi\xi}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \sin m\beta \sin \frac{n\pi\xi}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\beta \sin \frac{n\pi\xi}{l} \end{bmatrix} - \text{матрица функций формы; } \vec{w}_{mn} = \{u_{mn}; v_{mn}; w_{mn}\} - \text{век-}$$

тор амплитуд перемещений, соответствующих гармоникам m (по окружности) и n (вдоль оси котла).

Следует отметить, что моментная теория оболочек описывает самоуравновешенное в поперечных сечениях напряженно-деформированное состояние (НДС). При этом гармоника $m=0$ описывает осесимметричную деформацию и учитывается в настоящем расчете только при определении усилий N_1^* , N_2^* . Гармоника $m=1$ исключается потому, что описывает несамоуравновешенное по сечению НДС, которое не учитывается расчетом котла на основе теории стержней.

Подставим в выражения для потенциальной энергии (3) и работы (4) геометрические (1) и физические (2) соотношения и учтем принятую аппроксимацию (5).

$$P = \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\omega}_{mn}^T \left(\int_0^l \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [d]^T [B] [d] [\Phi] R d\beta d\xi \right) \bar{\omega}_{mn}, \quad (6)$$

$$A = \frac{1}{2} P_{cr} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\omega}_{mn}^T \left(\int_0^l \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [E_{\omega}] \bar{N}^{*T} [d] [\Phi] R d\beta d\xi \right) \bar{\omega}_{mn}. \quad (7)$$

В результате потенциальная энергия и работа выразятся через амплитуды гармоник перемещений.

В соответствии с принципом Лагранжа, условием равновесия выступает минимум полной энергии (сумма потенциальной энергии и работы внешних сил). Условие минимума в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}_{mn}} - \frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}_{mn}} = 0. \quad (8)$$

При интегрировании выражений (6) и (7) имеет место ортогональность тригонометрических функций, в результате чего система распадается по отдельным парам гармоник m и n , т.е. для каждой комбинации значений гармоник расчет можно вести независимо.

В результате приходим к следующей системе уравнений, описывающих условие потери устойчивости:

$$([r_{mn}] - P_{cr} [r_{mn}^*]) \bar{\omega}_{mn} = \vec{0}, \quad (9)$$

где $[r_{mn}]$ — матрица жесткости:

$$[r_{mn}] = \int_0^l \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [d]^T [B] [d] [\Phi] R d\beta d\xi, \quad (10)$$

$[r_{mn}^*]$ — дополнительная матрица жесткости:

$$[r_{mn}^*] = \int_0^l \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [E_{\omega}] \bar{N}^{*T} [d] [\Phi] R d\beta d\xi. \quad (11)$$

Матрицы третьего порядка (10) и (11) симметричны относительно главной диагонали и имеют вид:

$$[r_{mn}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}; [r_{mn}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{23}^* \\ 0 & r_{23}^* & r_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение (9) описывает общую проблему собственных значений. Нетривиальному решению соответствует условие, что определитель системы равен нулю (что выражает частную проблему собственных значений):

$$|[r_{mn}] - P_{cr} [r_{mn}^*]| = 0. \quad (12)$$

Если раскрыть распределитель, можно получить алгебраическое уравнение относительно P_{cr} , которое в связи со структурой матрицы $[r_{mn}^*]$ принимает вид квадратного уравнения с коэффициентами:

$$\begin{cases} a = -r_{11} r_{23}^{*2}; \\ b = (r_{12}^2 - r_{11} r_{22}) r_{33}^* + 2(r_{11} r_{23} - r_{12} r_{13}) r_{23}^*; \\ c = r_{11} (r_{22} r_{33} - r_{23}^2) + 2r_{12} r_{13} r_{23} - r_{12}^2 r_{33} - r_{13}^2 r_{22}. \end{cases} \quad (13)$$

Дискриминант при всех комбинациях m и n оказался положительным, что говорит о наличии двух собственных значений P_{cr} , о различии которых будет сказано ниже. Каждому собственному значению соответствует собственный вектор $\bar{\omega}_{mn}$, который можно найти, подставив в уравнение (9) данное собственное значение и решив систему алгебраических уравнений. Полученный вектор амплитуд перемещений определяет форму потери устойчивости котла для данного давления.

Результаты

Была выполнена проверка разработанной методики путем сравнения получаемых результатов с результатами, полученными ранее на основе метода конечных элементов (МКЭ) [8;19]. Рассчитывалась устойчивость наружного котла криогенной цистерны без шпангоутов со следующими параметрами цилиндрической части: $R=1,504$ м; $l=12,22$ м. Были рассчитаны два варианта материала оболочки: сталь 09Г2С ($E=2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu=0,3$) и алюминиевый сплав АМг5 ($E=7,3 \cdot 10^4$ МПа; $\mu=0,33$). Варьировалась также толщина h . Результаты сведены в табл. 1.

Было проведено также исследование устойчивости оболочки котла нефтебензиновой цистерны со следующими параметрами: $R=1,7$ м; $l=17,5$ м; $h=10$ мм; $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu=0,3$. Определены критические значения наружного давления и формы потери устойчивости. Результаты расчетов выборочно приведены в табл. 2 так, что для каждого n выбран вариант с наименьшим P_{cr} .

Определялись также формы потери устойчивости по собственным векторам системы уравнений (9). На рис. 2 приведен пример формы деформации после потери устойчивости при наименьшем критическом давлении 0,0477 МПа ($m=3$; $n=1$). Наружная кривая соответствует предельно возможной деформации перед смыканием оболочки к оси, а внутренняя кривая — промежуточному состоянию.

Выводы и обсуждение

Оценка достоверности предложенной методики показала удовлетворительное соответствие результатов при сравнении с полученными ранее результатами (см. табл. 1).

Расчеты критических значений наружного давления показали (см. табл. 2), что наименьшее критическое значение наружного давления составляет 0,0477 МПа (при $m=3$; $n=1$). Столь низкая величина давления объясняется выбором геометрических характеристик оболочки (длины, радиуса, толщины), очевидно, не сообщающих оболочке достаточной жесткости. Обычно выбор радиуса и длины производится из соображений повышения объема котла цистерны и с целью обеспечения устойчивости не изменяется. Для повышения критического значения давления рекомендуется увеличивать толщину оболочки и подкреплять ее шпангоутами.

Таблица 1

Проверка разработанной методики

Вариант	Минимальное P_{cr} , МПа		Относительное расхождение, %
	Расчет МКЭ	Предлагаемая методика	
09Г2С; $h=8$ мм	0,05121	0,05009	2,2
09Г2С; $h=12$ мм	0,2476	0,26878	8,6
АМг5; $h=12$ мм	0,05226	0,05440	4,1
АМг5; $h=18$ мм	0,1345	0,12888	4,2

Таблица 2

Критические значения наружного давления

m	n	P_{cr1} , МПа	P_{cr2} , ГПа
3	1	0,0477	–43,3
4	2	0,1020	–80,9
5	3	0,1498	–129,2
6	4	0,1963	–188,2
7	5	0,2470	–257,9
7	6	0,3008	–257,5
8	7	0,3453	–337,9
8	8	0,4023	–338,0
9	9	0,4452	–429,2

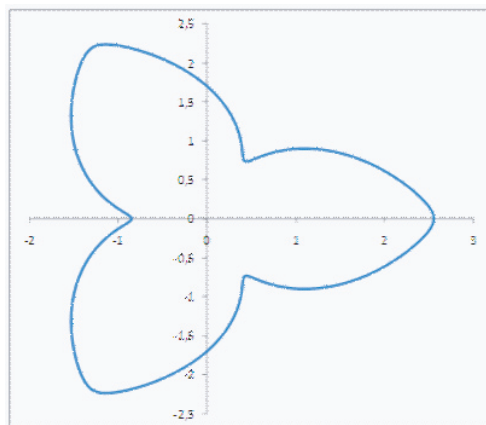


Рис. 2. Пример формы потери устойчивости

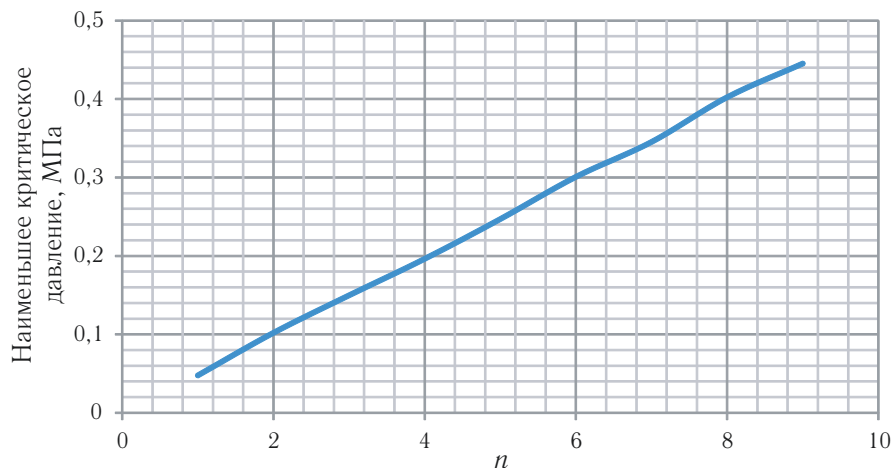


Рис. 3. Зависимость наименьшего критического давления от номера гармоники по длине

Анализируя зависимость наименьшего критического давления от номера гармоники n (по длине оболочки), можно констатировать практически пропорциональную зависимость (см. рис. 3). То есть наиболее вероятная форма потери устойчивости имеет одну волну.

Зависимость наиболее вероятной формы потери устойчивости в поперечном сечении от номера гармоники по длине приведена на рис. 4.

В целом из диаграммы видна тенденция к повышению порядка гармоники (усложнению формы) по окружности при увеличении числа полуволин по длине. Это подтверждают многочисленные данные из литературных источников о формах потери устойчивости цилиндрических оболочек [10–14].

Следует остановиться на упомянутом выше факте о появлении дополнительного решения квадратного уравнения при определении собственных значений. Эти значения приведены в 4-м столбце табл. 2. Как видно, все они отрицательны, т.е. соответствуют внутреннему, а не наружному давлению. Кроме того, это очень большие значения, которые не могут быть реализованы. Вместе с тем, уместно поставить вопрос: имеют ли эти решения физический смысл? При ответе на это вопрос можно учесть следующие соображения.

Появление двух корней вызвано наличием побочных элементов в дополнительной матрице жесткости, что, в свою очередь, вытекает из уравнений моментной теории оболочек, т.е. это решение обоснованно.

Следует отметить, что в упрощенном варианте теории оболочек [18;20] деформация изменения кривизны в плоскости направляющей не зависит от тангенциального перемещения, в результате чего все побочные эле-

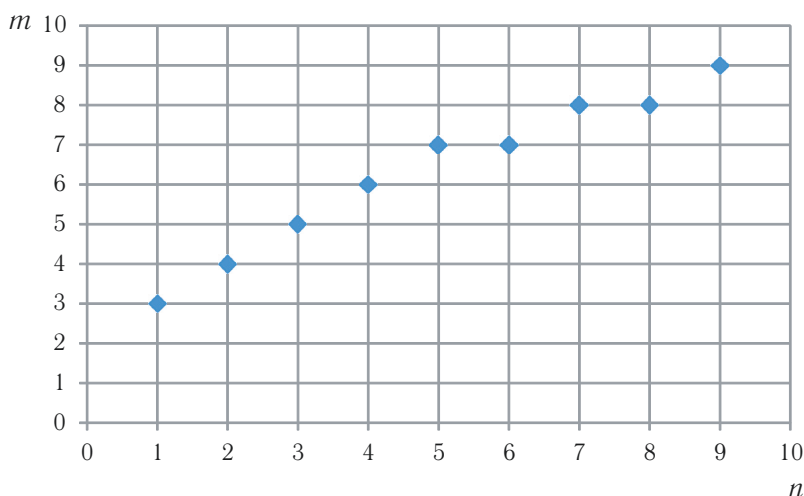


Рис. 4. Зависимость номера гармоники по окружности от номера гармоники по длине

менты матрицы равны нулю. При применении этого варианта теории «основные» значения критического давления практически совпадают с приведенными в 3-м столбце табл. 2, а «побочные» решения отсутствуют.

Авторы полагают, что «побочные» решения имеют физический смысл, но только в определенных идеализированных условиях и в рамках принятых при расчете допущений. Принятая аппроксимация формы перемещений в принципе допускает сближение концевых сечений (теоретически ограниченное длиной котла), значительные радиальные перемещения оболочки, геометрически ограниченные величиной радиуса (см. рис. 2).

Таким образом, можно заключить, что данное «побочное» решение в виде огромного внутреннего давления имеет физический смысл, но на практике не может реализоваться по нескольким причинам, основными из которых представляются следующие:

- таких давлений на Земле в принципе не существует;
- до достижения такого давления произойдет потеря прочности (разрушение) оболочки.

В целом по результатам проведенного исследования можно заключить следующее.

1. Предложена методика оценки устойчивости цилиндрической оболочки на основе моментной теории оболочек и принципа Лагранжа.

2. Достоверность получаемых результатов подтверждена сравнением с ранее полученными результатами расчетов с применением МКЭ. Наибольшее относительное расхождение составило 8,6%, что говорит об удовлетворительном соответствии.

3. Проведено исследование критических значений наружного давления при варьировании номерами гармоник аппроксимации перемещений.

4. Разработанная методика в виде алгебраических формул позволяет достаточно эффективно оценивать критические значения наружного давления на этапе проектирования вагонов-цистерн и выбирать соответствующие конструктивные решения.



Литература

1. URL: https://img.lrytas.lt/show_foto/?f=4&id=1879491&s=20 (дата обращения 27.05.2022).
2. URL: <https://asremavad.com/wp-content/uploads/2019/04/vacuum-mythbusters-tanker.jpg> (дата обращения 27.05.2022).
3. URL: <https://zen.yandex.ru/media/carbontechnology/pochemu-shlopyvaetsia-cisterna-5d62ac1f04af1-f00aeac2200> (дата обращения 27.05.2022).
4. Филин, А.П. Элементы теории оболочек: учебное пособие / А.П. Филин, проф., д-р техн. наук; Ленингр. ин-т инженеров ж.-д. транспорта им. акад. В.Н. Образцова. — Ленинград: Стройиздат. Ленингр. отд-ние, 1970. — 207 с. — Текст: непосредственный.

5. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. / Ред. совет В.Н. Челомей [и др.]. — Москва: Машиностроение. Т.1: Колебания линейных систем / И.И. Артоболевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин [и др.]; Под ред. В.В. Болотина. — 1978. — 352 с. — Текст: непосредственный.
6. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен: пер. с англ. — М.: Стройиздат, 1979. — 320 с. — Перевод изд.: *Dinamics of Structures* / Ray W. Clough, Joseph Penzien. — New York, 1975. — Текст: непосредственный.
7. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 010500 «Механика»: [в 2 т.] / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. — Изд. 7-е, испр. и доп. — Москва: Дрофа. Т.2: Динамика. — 2006. — 719 с. — Текст: непосредственный.
8. Беспалько, С.В. Разработка и анализ моделей повреждающих воздействий на котлы цистерн для перевозки криогенных продуктов : специальность: 05 .22.07: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Беспалько Сергей Валерьевич; МИИТ. — Москва, 2000. — 427 с. — Текст: непосредственный.
9. Bepalko S., Grigorev P., Ibodulloev Sh., Turajonov K., Numonov A.: Mathematical model of oscillations of a railway tank car with partial filling under shunting collision. 2020 IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 883 (2020) 012134 <https://doi.org/10.1088/1757-899X/883/1/012134>.
10. Bepalko S., Grigorev P., Ruzmatov M., Ibodulloev Sh.: A study method for possible breakdown of boiler tank for dangerous good in an emergence collision. E3S Web Conf., 224(2020) 01045 <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022401045>.
11. Grigoriev P.S., Ibodulloev Sh.R., Poyonov V.B.: An approach for estimating critical temperatures of buckling of shallow cylindrical shell. (2019) J:Technical science and innovation. <https://doi.org/10.51346/tstu-01.19.2.-77-0029>.
12. Michael Ebie Onyia, Galerkin-Vlasov Variational Method for the Elastic Buckling Analysis of SSCF and SSSS Rectangular Plates / Michael Ebie Onyia, Eghosa. O. Rowland-Lato, Charles Chinwuba Ike // International Journal of Engineering Research and Technology. ISSN 0974-3154, Volume 13, Number 6 (2020), pp. 1137—1146.
13. Lopatin AV, Morozov EV., Approximate buckling analysis of the CCFF orthotropic plates subjected to in-plane loading, International Journal of Mechanical Sciences, 2015; 85: 38—44.
14. Григорьев, П.С. Определение критических температур потери устойчивости пологих цилиндрических оболочек / П.С. Григорьев, С.В. Беспалько, В.В. Гончаров. — Текст: непосредственный // Тепловые процессы в технике. — 2021. — Т.13, №7. — С. 324—328.
15. Котуранов, В.Н. Определение внутренних усилий в цилиндрической части оболочки котла цистерны. Большегрузные восьмиосные вагоны / В.Н. Котуранов. — Москва: Транспорт, 1968. — 288 с. — Текст: непосредственный.
16. Конструирование и расчет вагонов: Учеб. для студентов вузов ж.-д. транспорта / В.В. Лукин, Л.А. Шадур, В.Н. Котуранов и [др.]; Под ред. В.В. Лукина. — Москва, 2000. — 726 с. — Текст: непосредственный.
17. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко: избр. работы под ред. Э.И. Григолюка. — Москва: Наука, 1971. — 807 с. — Текст: непосредственный.
18. Власов, В.З. Избранные труды: В 3 т. Т.1. Очерк научной деятельности. Общая теория оболочек. Статьи. — Издание подготовлено комиссией по изданию трудов В.З. Власова. — Москва: Издательство Академии наук СССР, 1962. — 1964. — 528 с. — Текст: непосредственный.
19. Дяченко, И.А. Сравнительный анализ теорий и конечно-элементных моделей расчета свободных колебаний цилиндрических оболочек / И.А. Дяченко, А.А. Миронов, Ю.М. Свердлик. — Текст: непосредственный // Транспортные системы. — 2011. — №3(13). — С. 63—55.
20. Платонов, В.В. Устойчивость и колебания цилиндрической оболочки при осевом сжатии в неклассической постановке / В.В. Платонов. — Текст: непосредственный // Вестник СПбГУ. — 2011. — Сер.1. — Вып. 1. — С. 132—137.
21. Altenbach, H., Eremeyev, V.A. (Eds). Shelllike Structures: Non-classical Theories and Applications. Advanced Structured Materials. Volume 15, DOI: 10.1007/978-3-642-21855-2. Springer, Berlin et al. 2011, 761 p.